

現役合格への軌跡

今回は 2026 年度の大阪大学の理系の第 1 問を解説したいと思います。

理系第 1 問

座標平面において、 $y = x - x^3$ で表される曲線を C とする。実数 s に対して、 C 上の点 $(s, s - s^3)$ における C の接線を l_s で表す。 t を $0 < t < 1$ をみたす実数とすると、 l_0 と l_1 の交点を P 、 l_0 と l_t の交点を Q 、 l_1 と l_t の交点を R とし、三角形 PQR の面積を $S(t)$ とする。

- (1) $S(t)$ を t の式で表せ。
- (2) 実数 t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $S(t)$ を最大にする t の値と、 $S(t)$ の最大値を求めよ。

※なお本原稿における解答や解説は、大阪大学が公表したのではなく、研伸館が独自で作成したものです。

【解答】

(1) $f(x) = x - x^3$ とすると

$$f'(x) = 1 - 3x^2$$

であるから、 l_s の方程式は

$$y = (1 - 3s^2)(x - s) + s - s^3$$

$$y = (1 - 3s^2)x + 2s^3$$

である。よって、 l_0 、 l_1 、 l_t の方程式はそれぞれ

$$l_0: y = x$$

$$l_1: y = -2x + 2$$

$$l_t: y = (1 - 3t^2)x + 2t^3$$

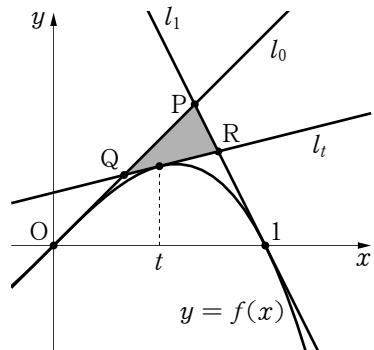
である。よって

$$P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$Q\left(\frac{2}{3}t, \frac{2}{3}t\right)$$

$$R\left(\frac{2(t^2 + t + 1)}{3(t + 1)}, \frac{-2(2t^2 - t - 1)}{3(t + 1)}\right)$$

である。



したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{2}{3}(1-t)(-1, -1) \\ \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{2t^2}{3(t+1)}(1, -2) \end{aligned}$$

である。 $0 < t < 1$ より

$$1 - t > 0, \quad \frac{2t^2}{3(t+1)} > 0$$

であるから

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(1-t) \cdot \frac{2t^2}{3(t+1)} \\ &\quad \times |(-1) \cdot (-2) - 1 \cdot (-1)| \\ &= \frac{2t^2(1-t)}{3(t+1)} \end{aligned}$$

である。

(2) (1) より

$$S(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{t^2 - t^3}{t + 1}$$

であるから

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(2t - 3t^2)(t + 1) - (t^2 - t^3) \cdot 1}{(t + 1)^2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{-2t(t^2 + t - 1)}{(t + 1)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$t^2 + t - 1 = 0 \quad \therefore t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

であり

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$$

現役合格への軌跡

であることから、 $S(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	(0)	...	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$...	(1)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$			↗		↘

よって、 $S(t)$ を最大にする t の値は

$$t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

であり、 $S(t)$ の最大値は

$$\begin{aligned} & S\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \frac{2 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{3 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1\right)} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}}{3 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{(3-\sqrt{5})^2}{3(\sqrt{5}+1)} \\ &= \frac{2(7-3\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{3 \cdot 4} \\ &= \frac{-11+5\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

である。

【解説】

- (1) 3本の接線によって囲まれる三角形の面積を求める問題です。文字定数 t を含んでいるとはいえ、接線の方程式は容易に求められますから、三角形の3頂点の座標も求めることができます。ここで、以下の公式を使おうと思えるはずですが、

公式 (三角形の面積)

$\vec{x} = (a, b)$, $\vec{y} = (c, d)$ によって張られる三角形の面積は

$$\frac{1}{2}|ad - bc|$$

である。

R の座標が多少複雑なので、計算ミスに注意しましょう。検算としては l_0, l_1 の傾きがそれぞれ $1, -2$ であることから、直線 PQ, PR の方向ベクトルがそれぞれ $(1, 1), (1, -2)$ になっているかを確認しましょう。

また l_i が l_0, l_1 に限りなく近づいたとき、 $S(t)$ は 0 に限りなく近づくのは図より明らかですから

$$\lim_{t \rightarrow +0} S(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1-0} S(t) = 0$$

となるような答えになっているかを確認しましょう。

- (2) $S(t)$ の式が分かっているので、「微分して増減表をかく」ことによって、最大値を求めることができます。阪大に合格するにはこのような典型的な問題をしっかりと完答できる力が必要です。

【解答】中では極大値をただ代入して計算していますが、代入する t の値が今回のようにきれいではない場合は、 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ($= \alpha$ とおく) が $t^2 + t - 1 = 0$ の解の一つであることから

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

が成り立つことを利用して、計算を簡略化することもできます。実際やってみると

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \frac{2\alpha^2(1-\alpha)}{3(\alpha+1)} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(-\alpha+2)(\alpha^2+\alpha-1) - 3\alpha+2}{\alpha+1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{-3\alpha+2}{\alpha+1} \\ &= \frac{2}{3} \left(-3 + \frac{5}{\alpha+1}\right) \\ &= \frac{2}{3} \left(-3 + \frac{5}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1}\right) \\ &= \frac{-11+5\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

のようになります。今回の計算はあまり労力は変わらないのでどちらでもいいですが、どちらが計算が楽になるかを考える習慣をつけるようにしておきましょう。

今回は以上です。お疲れさまでした。

(数学科 栗野)