現役合格への軌跡

今回は 2026 年度の岡山大学の理系の第 1 問を解説します.

理系第 1 問

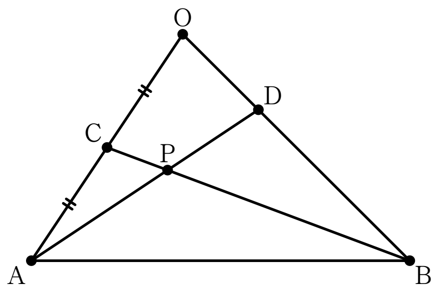
t を $0<t<1$ を満たす実数とする．三角形 OAB において，辺 OA の中点を C，辺 OB を $t:(1-t)$ に内分する点を D とし，線分 BC と線分 AD の交点を P とする．以下の問いに答えよ.

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ と t を用いて表せ.

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}$ とする．$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\leqq 1$ を満たす t の値の範囲を求めよ.

（単元：ベクトル（数 C））

【解答】



(1)　C は辺 OA の中点であり, D は辺 OB を $t:(1-t)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\vec{a}\,,\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{b}$$

である.

P は線分 BC 上にあるから，実数 s $(0\leqq s\leqq 1)$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{s}{2}\vec{a}+(1-s)\vec{b}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

と表せる．また P は線分 AD 上にあるから，実数 u $(0\leqq u\leqq 1)$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=(1-u)\vec{a}+ut\vec{b}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

と表せる.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，② の係数を比較して

$$\begin{cases}\dfrac{s}{2}=1-u\\ 1-s=ut\end{cases}$$

が成り立つ．これを解くと $0<t<1$ より

$$s=\frac{2-2t}{2-t}\,,\ u=\frac{1}{2-t}$$

となる．ここで $0<t<1$ より

$$1<2-t<2$$
$$\frac{1}{2}<\frac{1}{2-t}<1\qquad\therefore\quad \frac{1}{2}<u<1$$

であり，$s=2(1-u)$ より

$$0<s<1$$

であるから

$$0\leqq s\leqq 1\,,\ 0\leqq u\leqq 1$$

を満たす.

以上より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1-t}{2-t}\vec{a}+\frac{t}{2-t}\vec{b}$$

である.

(2)　$|\vec{a}|^2=1$, $|\vec{b}|^2=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\left(\frac{1-t}{2-t}\right)^2+2\cdot\frac{(1-t)t}{(2-t)^2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$+\left(\frac{t}{2-t}\right)^2\cdot 4$$
$$=\frac{(1-t)^2+(1-t)t+4t^2}{(2-t)^2}$$
$$=\frac{4t^2-t+1}{(2-t)^2}$$

となる.

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\leqq 1$ は両辺 0 以上より 2 乗して

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\leqq 1$$
$$\frac{4t^2-t+1}{(2-t)^2}\leqq 1$$
$$4t^2-t+1\leqq(2-t)^2\quad(\because\ \ (2-t)^2>0)$$
$$4t^2-t+1\leqq t^2-4t+4$$
$$3t^2+3t-3\leqq 0$$
$$t^2+t-1\leqq 0$$

となる．よって

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq t \leqq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

が得られる．これと $0<t<1$ より，求める t の範囲は

$$0<t \leqq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

となる．

【解説】

・(1) について

平面ベクトルにおける 2 線分の交点を求める問題で，定石通りの処理になります．

交点 P を，線分 BC 上の点，線分 AD 上の点ととらえ，それぞれ直線のベクトル方程式を用いて立式し，係数比較によって連立方程式を解くのが基本方針となります．

> 直線のベクトル方程式
>
> 点 P が直線 XY 上の点ならば，実数 k を用いて
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OX}}+k\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$
>
> と表すことができる．

今回は，直線上ではなく線分上の点のため，パラメータである s や u に 0 以上 1 以下の範囲をつけて立式することになります．s，u が定まったあとに，範囲を満たすかのチェックはしておきましょう．

また，係数比較の前に，係数比較が行えることの根拠となる「$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が 1 次独立であること」は明記しておきましょう．

・(2) について

ベクトルの大きさに関する処理は，成分公式か，大きさの 2 乗展開が定石となりますが，今回は座標・成分に関する設定がないため，また内積が与えられていることもあり，大きさの 2 乗展開

$$|s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|^2=s^2|\overrightarrow{a}|^2+2st\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t^2|\overrightarrow{b}|^2$$

を選択することになります．

得られた不等式は分母 $(2-t)^2$ を払いたくなりますが，不等式の両辺に何かをかけたり割ったりするときは，その符号を必ず確認する癖をつけましょう．もちろん解答の中に確認したことを記述しておく必要があります．

最後に $t^2+t-1 \leqq 0$ という形が現れます．2 次方程式 $t^2+t-1=0$ の解は $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ になりますが，問題文の条件 $0<t<1$ と組み合わせて答えを表す必要があります．条件との共通範囲をとることを忘れないようにしてください．

本問のポイントは

1. 2 線分の交点を，2 線分上の点ととらえ直線のベクトル方程式を用いること
2. ベクトルの大きさは 2 乗して処理すること
3. 解の範囲と問題文で与えられた t の範囲の共通範囲を答えること

の 3 点でした．基本に忠実な処理が求められる問題です．

今回は以上となります．お疲れ様でした．

数学科　松浦