

現役合格への軌跡

今回は 2026 年度の大阪大学の文系の第 1 問を解説したいと思います。

文系第 1 問

正の実数の列 $\{a_n\}$ が次の条件によって定められている。

$$a_1 = 1, a_2 = 2,$$

$$a_{n+2} = \frac{3^n a_{n+1}^2}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定めるとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

※なお本原稿における解答や解説は、大阪大学が公表したのではなく、研伸館が独自で作成したものです。

【解答】

(1) すべての自然数 n において $a_n > 0$ であることから

$$a_{n+2} = \frac{3^n a_{n+1}^2}{a_n}$$

の両辺の底が 2 の対数をとると

$$\log_2 a_{n+2} = \log_2 \frac{3^n a_{n+1}^2}{a_n}$$

$$\log_2 a_{n+2} = n \log_2 3 + 2 \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n$$

$$\begin{aligned} \log_2 a_{n+2} - \log_2 a_{n+1} \\ = \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n + (\log_2 3)n \end{aligned} \quad \text{..... ①}$$

となる。すべての自然数 n で

$$b_n = \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n$$

とおくと、①は

$$b_{n+1} = b_n + (\log_2 3)n$$

となる。また

$$\begin{aligned} b_1 &= \log_2 a_2 - \log_2 a_1 \\ &= \log_2 2 - \log_2 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。よって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\log_2 3)k \\ &= 1 + \frac{\log_2 3}{2}(n-1)n \end{aligned}$$

である。これは $n = 1$ のときも成り立つ。

以上より、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = 1 + \frac{\log_2 3}{2}(n-1)n$$

である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{\log_2 a_n\}$ の階差数列であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \log_2 a_n \\ &= \log_2 a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{\log_2 3}{2}(k-1)k \right\} \\ &= n-1 + \frac{\log_2 3}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - k) \\ &= n-1 + \frac{\log_2 3}{2} \left\{ \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) - \frac{1}{2}(n-1)n \right\} \\ &= n-1 + \frac{\log_2 3}{6}n(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

である。これは $n = 1$ のときも成立する。

以上より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{\log_2 a_n} \\ &= 2^{n-1} \cdot 2^{(\log_2 3) \cdot \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)} \\ &= 2^{n-1} \cdot 3^{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

である。

【解説】

(1) 問題文に

$$b_n = \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n$$

と定めるとあることから、漸化式の両辺を底が 2 の対数をとることを考えるのは自然でしょう。この誘導がなかったとしても、 $\frac{3^n a_{n+1}^2}{a_n}$ のような積や商、べき乗がある式に対して対数をとることによって、式を和や差、定数倍に直すことができます。思いつけるようにしておきましょう。

現役合格への軌跡

対数をとる

$$\log_2 a_{n+2} = n \log_2 3 + 2 \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n \dots\dots\dots ②$$

とした後は、左辺で

$$b_{n+1} = \log_2 a_{n+2} - \log_2 a_{n+1}$$

を作ろうと思うと右辺から $\log_2 a_{n+1}$ を移項すればよいですね。その結果、右辺も b_n で表すことができるので、数列 $\{b_n\}$ の漸化式を得ます。この漸化式は数列 $\{b_n\}$ の階差数列の一般項が $(\log_2 3)n$ ということを表していますから、以下の公式から b_n を求めることができます。

数列 $\{A_n\}$ の階差数列が $\{B_n\}$ であるとき、 $n \geq 2$ において

$$A_n = A_1 + \sum_{k=1}^{n-1} B_k$$

である。

$n \geq 2$ における結果に $n = 1$ を代入して一致することを確認しておきましょう（一般に一致するとは限らないですが、ほとんどの場合一致します）。

ところで、②を作った後

$$b_n = \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n$$

という誘導がなかったら解けるでしょうか。

$$c_n = \log_2 a_n$$

という置き換えを行うと、②は

$$c_{n+2} = 2c_{n+1} - c_n + n \log_2 3 \dots\dots\dots ③$$

のような3項間漸化式です。3項間漸化式といえ、次の知識を覚えておかななくてはなりません。

3項間漸化式

$$d_{n+2} = pd_{n+1} + qd_n \quad (p, q \text{ は定数})$$

は、 x の方程式 $x^2 = px + q$ の2解 α, β を使って

$$d_{n+2} - \alpha d_{n+1} = \beta(d_{n+1} - \alpha d_n)$$

とできる。これは数列 $\{d_{n+1} - \alpha d_n\}$ が公比 β の等比数列であることを表している。

これを想起すると、③より ($n \log_2 3$ は一旦無視して)

$$x^2 = 2x - 1 \dots\dots\dots ④$$

を解いて、 $x = 1$ (重解) を得ます。すると

$$c_{n+2} - c_{n+1} = c_{n+1} - c_n + n \log_2 3$$

という変形に繋がります

$$b_n = c_{n+1} - c_n (= \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n)$$

とおくことができます。④を立式するところで「なんで $n \log_2 3$ を無視するんだ！」と思うかもしれませんが、やろうとしていることが3項間漸化式を、「カタマリ」となる数列（今回は $c_{n+1} - c_n$ ）を見つけて2項間漸化式を作ろうとしているにすぎません。その目的を達成するために $n \log_2 3$ は無関係ですから、一旦無視して考えます。

(2) 解答の通り、数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{\log_2 a_n\}$ の階差数列ですから、(1)の最後と同様に計算すれば $\log_2 a_n$ が求まります。最後に

$$a_n = 2^{\log_2 a_n}$$

であることに注意して a_n の式を求めればよいでしょう。対数の定義から

$$2^{\log_2 3} = 3$$

ですから、指数に $\log_2 3$ が残らないようにしましょう。

途中のシグマ計算ですが

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \{(k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k\} \end{aligned}$$

現役合格への 軌跡

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}\{(n-2)(n-1)n - (-1) \cdot 0 \cdot 1\} \\ &= \frac{1}{3}n(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

とすれば、計算を楽にすることができます。

今回は以上です。お疲れ様でした。

(数学科 栗野)