現役合格への軌跡

今回は2026年度の神戸大学の文系の第1問を解説したいと思います。

文系　第1問

$y=x^3$ のグラフを C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$ を通る直線 l が C と相異なる3つの共有点P，A，Bをもつように動くとする．l の方程式を $y=ax+t$ とする．以下の問に答えよ．

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　Aの x 座標を α とし，Bの x 座標を β とする．$\alpha\beta$ と $\alpha^2+\beta^2$ を t を用いて表せ．

(3)　Aにおける C の接線を l_{A} とし，Bにおける C の接線を l_{B} とする．l_{A} と l_{B} の交点Qの軌跡を求め，図示せよ．

（単元：高次方程式（数II），微分法（数II），図形と方程式（数II），配点：25点）

【解答】

(1)　直線 $l: y=ax+t$ が点 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$ を通ることから

$$-1=-a+t$$
$$\therefore\ a=t+1$$

である．すなわち

$$l: y=(t+1)x+t$$

である．$y=x^3$ と連立して

$$x^3=(t+1)x+t$$
$$x^3-(t+1)x-t=0$$
$$(x+1)(x^2-x-t)=0$$

である．C と l が相異なる3つの共有点をもつことから，2次方程式

$$x^2-x-t=0\quad\cdots\cdots①$$

は異なる2つの実数解をもち，さらにそれらの解は -1 ではない．したがって，この2次方程式の判別式を D として，t の条件は

$$D>0\quad\text{かつ}\quad(-1)^2-(-1)-t\neq 0$$
$$1+4t>0\quad\text{かつ}\quad t\neq 2$$
$$\therefore\ -\frac{1}{4}<t<2,\ 2<t\quad\cdots\cdots②$$

である．

(2)　α，β は①の2解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-t\quad\cdots\cdots③$$

である．これより

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=1+2t\qquad\cdots\cdots④$$

である．

(3)　$f(x)=x^3$ とすると $f'(x)=3x^2$ である．よって，接線 l_{A} の方程式は

$$y=3\alpha^2(x-\alpha)+\alpha^3$$
$$y=3\alpha^2x-2\alpha^3$$

であり，同様にして l_{B} の方程式は

$$y=3\beta^2x-2\beta^3$$

である．

したがって，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおくと

$$\begin{cases}Y=3\alpha^2X-2\alpha^3 & \cdots\cdots⑤\\ Y=3\beta^2X-2\beta^3 & \cdots\cdots⑥\end{cases}$$

である．

⑤－⑥より

$$3(\alpha^2-\beta^2)X-2(\alpha^3-\beta^3)=0$$
$$3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)X=2(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$
$$3X=2\{(1+2t)-t\}\quad(\because\ \alpha\neq\beta,\ ③,\ ④)$$
$$\therefore\ t=\frac{3}{2}X-1\quad\cdots\cdots⑦$$

であり，⑤$\times\beta^2-$⑥$\times\alpha^2$ より

$$(\beta^2-\alpha^2)Y=2\alpha^2\beta^2(\beta-\alpha)$$
$$(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)Y=2\alpha^2\beta^2(\beta-\alpha)$$
$$\therefore\ Y=2t^2\quad\cdots\cdots⑧$$
$$(\because\ \alpha\neq\beta,\ ③)$$

である．⑦，⑧より

$$Y=2\left(\frac{3}{2}X-1\right)^2$$
$$=\frac{9}{2}\left(X-\frac{2}{3}\right)^2$$

であり，②，⑦より

$$-\frac{1}{4} < \frac{3}{2}X - 1 < 2,\ 2 < \frac{3}{2}X - 1$$

$$\therefore\ \frac{1}{2} < X < 2,\ 2 < X$$

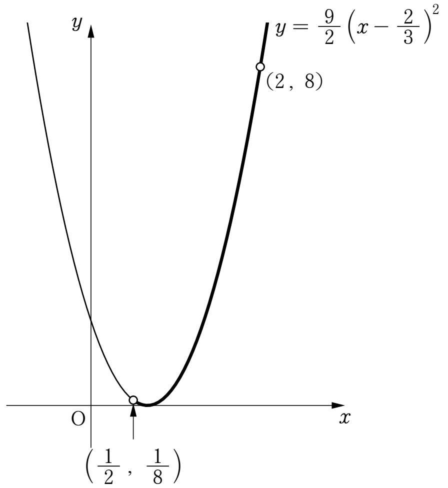
である．

以上より，点 Q の軌跡は

放物線：$y = \dfrac{9}{2}\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2$ の

$\dfrac{1}{2} < x < 2$，$2 < x$ の部分

であり，図示すると次図の太線部分である（白丸を含まない）．



＜解答終＞

【解説】

3 次関数を題材に，3 次方程式の解の条件，2 次方程式の解と係数の関係，接線，交点の軌跡など様々なテーマが出題されている融合問題です．融合されることで何をしたら良いか困ってしまうかもしれませんが，一つ一つは標準的な問題がしっかりできれば対応できるテーマです．この解説の最後に，基本の「check」用問題をつけますので，手が止まってしまった場合は，そちらを先に確認した上で再度挑戦してみてください．

以下，小問ごとに考え方や補足・注意点を述べます．

(1)　まずは 3 次関数のグラフ C と直線 l との共有点を考える問題です．共有点のうち 1 つが P であることから，l に現れている a と t は片方だけにできます．問題文で t のとりうる範囲を聞かれているので，a を消しましょう．次に，P 以外に共有点が 2 つ存在する条件を考えます．C と l の方程式を連立して

$$x^3 - (t+1)x - t = 0$$

が異なる 3 つの実数解をもつことが条件です．ここで，左辺の 3 次関数を微分してグラフを考えにいくのは遠回りです．点 P が共有点であることから $x = -1$ が解なのは分かるので

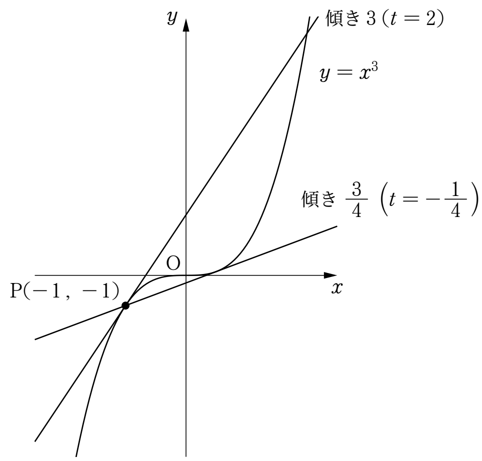
$$(x+1)(x^2 - x - t) = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

と因数分解して，$x^2 - x - t = 0$ を抜き出して考えましょう．

「解ける方程式は解く」

という意識をしっかりもってください．あとはこの 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつことから，$D > 0$ を解きます．ただし，それだけでは不十分で，$x^2 - x - t = 0$ が $x = -1$ を解にもつと $(*)$ は $x = -1$ を重解にもってしまいます．したがって，$x \neq -1$ から得られる $t \neq 2$ の条件も加えてください．これを忘れると (3) の答えにも影響が出てしまい，差がついてしまうので，注意が必要です．

なお，t の範囲について，図形的には次のように接線の傾きの範囲で捉えることができます．



(2)　(1) から，α，β は 2 次方程式 ① の実数解です．解と係数の関係を用いることで，$\alpha + \beta$，$\alpha\beta$ は直

ちに求まります．念のため，解と係数の関係を確認しておきます．

＜公式＞ 解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 解が α，β のとき
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\,,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$
である．

これより，本問では
$$\alpha+\beta=1\,,\ \alpha\beta=-t$$
が分かり，さらに $\alpha^2+\beta^2$ に関しても
$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
とすることで求まります．解と係数の関係と対称式は非常に相性が良いです．解と係数の関係で $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値を求め，そこから対称式の値を計算する流れは必ずできるようにしておいてください．

(3)　この問題の山場である 2 接線の交点の軌跡の問題です．まずは接線の方程式を求めます．

＜公式＞ 接線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a\,,\ f(a))$ における接線の方程式は
$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$
である．

上記の接線公式を用いて，l_{A}，l_{B} の方程式を求めましょう．l_{A} に関して，接線の傾きは $f'(x)$ ではなく $f'(\alpha)$ ですので間違えないようにしてください．あとは，これら 2 接線の方程式を連立して，Q の座標を求めていきます．軌跡の求め方も確認しておきます．

＜ point ＞ 軌跡を求める手順

$\boxed{1}$　求める点をおく
$\boxed{2}$　条件をすべて式に
$\boxed{3}$　(あれば) パラメータ消去

本問では軌跡を求める点は Q ですので，Q$(X\,,\ Y)$ とおきます．条件は (③ のもとで)「⑤ かつ ⑥ かつ ②」です．⑤ と ⑥ は Q が接線上にある条件です (先に連立して交点を出してしまっても良いです)．② の条件を忘れると答えが違ってしまうので気を付けましょう．

次に，パラメータ α，β を消去することを考えます．いきなりは消せないので，⑤，⑥ を X，Y の連立方程式と見て解いていきます．まず右辺同士をつないで (すなわち 2 式の差をとって) X を求めます．(2) がヒントになっていて，整理することで
$$X=\frac{2}{3}(t+1)\quad\cdots\cdots(**)$$
と t で表せることが分かります．パラメータ t の 1 文字だけになったことは大きいです．t を後で消去するので，⑦ のように変形しておきましょう．Y についても同様に求めると ⑧ を得ます．α，β の対称性を保った形で式変形を進めていくのが近道です．対称性を崩してやる場合は，$(**)$ を ⑤ に代入して
$$\begin{aligned}Y&=2\alpha^2(t+1)-2\alpha^3\\&=2\alpha^2(t+1-\alpha)\end{aligned}$$
となります．このままでは t と α が混在しているので，もう一工夫必要です．① から
$$t=\alpha^2-\alpha$$
ですので
$$\begin{aligned}Y&=2\alpha^2(t+1-\alpha)\\&=2\alpha^2(\alpha^2-2\alpha+1)\\&=2\alpha^2(1-\alpha)^2\\&=2\alpha^2\beta^2\quad(\because\quad\alpha+\beta=1)\\&=2t^2\quad(\because\quad\alpha\beta=-t)\end{aligned}$$
とできます．一度 t を消して，最後に t の式にするので，気付きにくいかもしれません．

最後に，t を消去します．⑦ から t を X で表せているので，② と ⑧ に代入することで X，Y の関係式，並びに X の範囲を得ます．これを図示すれば終了です．

解説は以上です．

最初に述べたように，基本を確認する問題を以下につけますので，必要に応じて使ってください．

check!

[1]　x の3次方程式

$$x^3+(a-1)x^2-(a-4)x-4=0$$

が2重解をもつような定数 a の値を求めよ．

[2]　2次方程式 $2x^2-x+3=0$ の2解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ の値をそれぞれ求めよ．

[3]　放物線 $C: y=x^2$ 上に2点 A$(2, 4)$，B$(-1, 1)$ をとる．A，B における C の接線をそれぞれ l_{A}，l_{B} とするとき，l_{A} と l_{B} の交点の座標を求めよ．

[4]　t が正の実数値をくまなくとるとき，放物線 $y=x^2+2tx+t$ の頂点 P の軌跡を求めよ．

【解答】

[1]

$$x^3+(a-1)x^2-(a-4)x-4=0$$
$$(x-1)(x^2+ax+4)=0$$

である．この方程式が2重解をもつのは，次のいずれかの場合である．

(i)　2次方程式 $x^2+ax+4=0$ が1ではない重解をもつ

(ii)　2次方程式 $x^2+ax+4=0$ が $x=1$ と1以外の解をもつ

(i) のとき，$x^2+ax+4=0$ の判別式を D として

$$D=0$$
$$a^2-16=0$$
$$a=\pm 4$$

である．このときの重解は $x=-\dfrac{a}{2}$ と表され，a がいずれの値のときも1ではないので適する．

(ii) のとき，$f(x)=x^2+ax+4$ として

$$f(1)=0$$
$$a+5=0$$
$$a=-5$$

である．このとき $f(x)=0$ を解くと

$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-1)(x-4)=0$$
$$x=1,\ 4$$

となり適する．

以上より

$$a=\pm 4,\ -5$$

である．

[2]　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2},\ \alpha\beta=\frac{3}{2}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}\\&=-\frac{11}{4}\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\\&=-\frac{17}{8}\end{aligned}$$

である．

<補足>

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

と式変形しても良い．

[3]　$f(x)=x^2$ とすると $f'(x)=2x$ である．よって，l_{A} の方程式は

$$y=f'(2)(x-2)+4$$
$$y=4x-4\quad\cdots\cdots①$$

であり，l_{B} の方程式は

$$y=f'(-1)(x+1)+1$$
$$y=-2x-1\quad\cdots\cdots②$$

である．①，② を連立して

$$4x-4=-2x-1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

であるから，l_{A} と l_{B} の交点の座標は

$$\left(\frac{1}{2}\,,\,-2\right)$$

である．

＜補足＞

2 接線の交点の x 座標は，A と B の x 座標の平均になります．これは一般に任意の放物線で成り立つ性質です．

[4]　P$(X\,,\,Y)$ とおく．

$$y = x^2 + 2tx + t$$

を平方完成すると

$$y = (x+t)^2 - t^2 + t$$

より

$$\begin{cases} X = -t & \cdots\cdots ① \\ Y = -t^2 + t & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

である．さらに

$$t > 0 \quad \cdots\cdots ③$$

である．

① より，$t = -X$ であるから，これと ② より

$$Y = -X^2 - X$$

である．さらに ③ より

$$-X > 0$$
$$\therefore\ X < 0$$

である．

以上より，点 P の軌跡は

放物線：$y = -x^2 - x$ の $x < 0$ の部分

である．

＜解答終＞

2026 年度の神大文系で出題された 3 つの大問は，いずれも完答するにはかなりの数学力が必要で，各大問の前半部分を確実に得点することが重要なセットでした．問題で聞かれていることは何で，使う道具は何かを正確に把握する能力が大事です．そのために，しっかりと基礎を固めてください．

それでは今回はここまでにしたいと思います．また次回をお楽しみに．

（数学科　川﨑）