

現役合格への軌跡

今回は 2026 年度の神戸大学の理系の第 1 問を解説したいと思います。

理系 第 1 問

1 個のさいころを 3 回続けて投げ、出た目の数を順に a, b, c とおく。多項式 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + 3x + b$$

$$g(x) = x^2 + cx + 1$$

とし、 $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの余りを $r(x)$ とおく。以下の問に答えよ。

- (1) $r(x)$ が 0 である確率を求めよ。
- (2) $r(x)$ が 0 でなく、かつ、 $r(x)$ の次数が 0 である確率を求めよ。
- (3) 方程式 $g(x) = 0$ が有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし、50 以下の正の整数 n に対し、 n が 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 のいずれとも異なるならば、 $\sqrt{n}$ が無理数であることを必要に応じて用いてよい。
- (4) $r(x)$ の次数が 1 であり、かつ、 $g(x)$ が $r(x)$ で割り切れる確率を求めよ。

(単元：確率 (数 A)・整数 (数 A)・多項式 (数 II))
配点：30 点)

【解答】

割り算をして

$$f(x) = g(x)(2x + a - 2c) + (1 - ac + 2c^2)x + b - a + 2c$$

である。よって

$$r(x) = (1 - ac + 2c^2)x + b - a + 2c$$

である。また、 a, b, c は 1 以上 6 以下の自然数である。

- (1) $r(x)$ が (多項式として) 0 である条件は

$$\begin{cases} 1 - ac + 2c^2 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b - a + 2c = 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。① より

$$c(a - 2c) = 1$$

であるから、 $c, a - 2c$ はいずれも 1 の約数であり、 $1 \leq c \leq 6$ であるから

$$(c, a - 2c) = (1, 1)$$

$$\therefore (a, c) = (3, 1)$$

である。これと ② より、 a, b, c の組は

$$(a, b, c) = (3, 1, 1)$$

の 1 組に決まる。

したがって、求める確率は

$$\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

である。

- (2) $r(x)$ が 0 でなく、かつ、 $r(x)$ の次数が 0 である条件は

$$\begin{cases} 1 - ac + 2c^2 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ b - a + 2c \neq 0 & \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

である。(1) と同様にして、③ より

$$(a, c) = (3, 1)$$

であり、これと ④ より $b \neq 1$ である。よって、 a, b, c の組は

$$(a, b, c) = (3, 2, 1), (3, 3, 1), (3, 4, 1), (3, 5, 1), (3, 6, 1)$$

の 5 組ある。

したがって、求める確率は

$$\frac{5}{6^3} = \frac{5}{216}$$

である。

- (3) 2 次方程式 $g(x) = 0$ の判別式を D とする。 $g(x) = 0$ が有理数解をもつには、実数解をもつことが必要であるから

$$D \geq 0$$

$$c^2 - 4 \geq 0$$

$$\therefore c \geq 2$$

が必要である。

このとき、 $g(x) = 0$ を解くと

$$x = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}$$

現役合格への軌跡

となるので、これが有理数となる条件は $\sqrt{c^2 - 4}$ が有理数となることである。 $c \geq 2$ のとき、 $\sqrt{c^2 - 4}$ の値を表にまとめると

c	2	3	4	5	6
$\sqrt{c^2 - 4}$	0	$\sqrt{5}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{21}$	$\sqrt{32}$

となる。

問題文のただし書きより、 $c = 3, 4, 5, 6$ のときは $\sqrt{c^2 - 4}$ は無理数であるから、適するのは $c = 2$ のときのみである。 a, b の値は任意であるから、求める確率は

$$\frac{1}{6}$$

である。

(4) $r(x)$ の次数が 1 である条件は

$$1 - ac + 2c^2 \neq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

である。

このとき、 $r(x) = 0$ を解くと

$$x = -\frac{b - a + 2c}{1 - ac + 2c^2}$$

である。この解を α とおくと、 α は有理数である。すると、 $g(x)$ が 1 次式 $r(x)$ で割り切れる条件は、 $g(\alpha) = 0$ 、つまり方程式 $g(x) = 0$ が有理数解 α をもつことである。よって、(3) より $c = 2$ であり、このとき

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 2x + 1 \\ &= (x + 1)^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\alpha = -1$$

である。

以上より、 $r(x)$ の次数が 1 であり、かつ、 $g(x)$ が $r(x)$ で割り切れる条件は

$$\textcircled{5} \quad \text{かつ} \quad c = 2$$

$$\text{かつ} \quad -\frac{b - a + 2c}{1 - ac + 2c^2} = -1$$

すなわち

$$a + b = 5 \quad \text{かつ} \quad c = 2$$

である。これを満たす a, b, c の組は

$$(a, b, c) = (1, 4, 2), (2, 3, 2), (3, 2, 2), (4, 1, 2)$$

の 4 組ある。

したがって、求める確率は

$$\frac{4}{6^3} = \frac{1}{54}$$

である。

<解答終>

【解説】

今回の問題は、多項式の割り算・確率・整数の融合問題でした。2026 年度の神戸大理系数学は、このような複数単元の融合問題の出題が目立ち、全体として難化しました。本問は、医学部志望であれば完答、他学部であれば(3)までをしっかりと取りたい問題です。解説の最後に、この問題を解くための基本となる「check」用問題を付けますので、手が止まってしまった人はそちらを確認した上で再度挑戦してみてください。

以下、設問ごとに解説していきます。

(1) まずは、割り算を行って $r(x)$ を求めます。ここを間違えてはこの大問を丸々失うことになるので、ミスは許されません。丁寧に計算し、見直もししっかりとしましょう。少し小さいですが、筆算も載せておきます。

$$\begin{array}{r} x^2 + cx + 1 \overline{) 2x^3 + ax^2 + 3x + b} \\ \underline{2x^3 + 2cx^2 + 2x} \\ (a - 2c)x^2 + x \\ \underline{(a - 2c)x^2 + (ac - 2c^2)x + a - 2c} \\ (1 - ac + 2c^2)x + b - a + 2c \end{array}$$

したがって

$$r(x) = (1 - ac + 2c^2)x + b - a + 2c$$

と求まります。 $r(x) = 0$ となる条件は、1 次の係数と定数項が 0 になること、すなわち

$$1 - ac + 2c^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad b - a + 2c = 0$$

です。ここからは整数問題になります。文字が 2 つだけの第 1 式に着目しましょう。1 を分離して

$$c(a - 2c) = 1$$

現役合格への 軌跡

と積の形を作ると、 c 、 $a-2c$ が1の約数と分かり

$$c = a - 2c = 1$$

すなわち

$$a = 3, c = 1$$

が決まります(さいころの目なので $1 \leq c \leq 6$ です). あとは第2式から b の値を決めれば、 $(a, b, c) = (3, 1, 1)$ の1組に決まるので、求める確率は $\frac{1}{6^3}$ となります。

- (2) 次に、 $r(x)$ が0でなく、かつ $r(x)$ の次数が0であるような a, b, c を求めます. 条件は $r(x)$ の1次の係数が0で定数項が0ではないことで

$$1 - ac + 2c^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad b - a + 2c \neq 0$$

となります. (1)での計算を利用しましょう. 第1式から $a = 3, c = 1$ で、第2式から b は1以外の値(5通り)となります. したがって、 (a, b, c) の組は全部で5組ですので、求める確率は $\frac{5}{6^3}$ です.

- (3) 次に2次方程式 $g(x) = 0$ が有理数解をもつ条件を考えます. この問題は(1)、(2)とは独立しています. すなわち、(1)、(2)ができていなくても着手することができる問題です. 神大数学の問題は、小問により誘導をかけて流れを作ることが多いですが、問題を広く見て、点数が取れるところを取る、という姿勢は持っていてください.

問題の中身を見ていきましょう. 2次方程式 $x^2 + cx + 1 = 0$ の解を考えます. 問題文のただし書きが大きなヒントです. 「50以下の正の整数 n に対して、 n が平方数でなければ $\sqrt{n}$ は無理数」というのを使って良いと書いてあります. 2次方程式で $\sqrt{\bullet}$ が現れる計算といえば、「解の公式」が思い浮かぶと思います. ひとまず、虚数ではないけないので、 $D \geq 0$ を見て $c \geq 2$ を決めます. すると、解の公式から

$$x = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}$$

とできるので、 $\sqrt{c^2 - 4}$ が有理数になることが条件です. ただし書きから、 $c^2 - 4$ が平方数になる

条件を考えましょう. $c = 2, 3, 4, 5, 6$ の5つをしらみ潰して調べて、 $c = 2$ のみが適することを確認してください. 求める確率は c だけで決まり、 $\frac{1}{6}$ です(全体を 6^3 通りで考える人は、 a, b の決め方が 6^2 通りあると考えて、 $\frac{6^2}{6^3}$ としてください).

少し誘導からそれますが、 $c = 2$ を決める別解も紹介します. 整数係数の方程式で有理数解ときたときに使える手法です.

<別解>

方程式 $g(x) = 0$ が有理数の解をもつとして、それを $\frac{l}{k}$ とおく(k は自然数、 l は整数で、 k と l は互いに素). すると

$$g\left(\frac{l}{k}\right) = 0$$

$$\left(\frac{l}{k}\right)^2 + c \cdot \frac{l}{k} + 1 = 0$$

$$l^2 + cl + k^2 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

$$k(cl + k) = -l^2$$

である. よって、 k は l^2 を割り切り、 k と l^2 は互いに素であるから $k = 1$ である. したがって、(*)より

$$l^2 + cl + 1 = 0$$

$$l(l + c) = -1$$

となるので

$$(l, l + c) = (1, -1), (-1, 1)$$

$$(l, c) = (1, -2), (-1, 2)$$

である. これと $1 \leq c \leq 6$ であることから

$$c = 2$$

と決まる(このとき、 $l = -1$ より $g(x) = 0$ の有理数の解は $x = -1$ である).

<別解終>

整数係数の方程式の場合、有理数解は

$$\pm \frac{(\text{定数項の約数})}{(\text{最高次係数の約数})}$$

の形になります(証明は上記と同様に解をおくことでできます). 本問では、最高次係数も定数項も1ですので、有理数解は ± 1 に限られるわけです.

現役合格への軌跡

- (4) $r(x)$ の次数が 1 である条件は, $r(x)$ の 1 次の係数が 0 でないこと, すなわち

$$1 - ac + 2c^2 \neq 0$$

です. これは問題ないでしょう.

難しいのは「 $g(x)$ が $r(x)$ で割り切れる」条件です. もちろん, 筆算を頑張って余りが 0 とすれば良いのですが, 計算が大変ですので工夫できないか考えましょう.

このとき, 思いついてほしいのが次の定理です.

<定理>

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $kx + l$ ($k \neq 0$) で割った余りは

$$P\left(-\frac{l}{k}\right)$$

である.

特に $k = 1$ のときは剰余の定理と呼ばれます. 証明は, 商を $Q(x)$, 余りを r (定数) として

$$P(x) = (kx + l)Q(x) + r$$

とおき, $x = -\frac{l}{k}$ を代入すれば示せます. 本問ではこれを使いましょう.

$r(x)$ が 1 次のとき, $r(x) = 0$ の解は

$$x = -\frac{b - a + 2c}{1 - ac + 2c^2}$$

となります. したがって, 上の<定理>から $g(x)$ が $r(x)$ で割り切れるための条件は

$$g\left(-\frac{b - a + 2c}{1 - ac + 2c^2}\right) = 0$$

です. ここで重要なのが, $-\frac{b - a + 2c}{1 - ac + 2c^2}$ が有理数であることです. $g(x) = 0$ が有理数の解をもつこととなりますので, (3) が使えます. この誘導に乗れるかどうか为本問の鍵です. (3) から $c = 2$ が決まり

$$g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

となります. したがって, $g(x) = 0$ の有理数の解は -1 ですので

$$-\frac{b - a + 2c}{1 - ac + 2c^2} = -1$$

と芋づる式に分かっていきます. あとは, 分母を払い

$$b - a + 2c = 1 - ac + 2c^2$$

$$b - a + 4 = 1 - 2a + 8 \quad (\because c = 2)$$

$$a + b = 5$$

となる組を求めたら OK です. このとき

$$1 - ac + 2c^2 = 9 - 2a \neq 0 \quad (\because 1 \leq a \leq 6)$$

に注意してください. 書き出すと a, b, c の組は 4 組になりますので, 求める確率は $\frac{4}{6^3} (= \frac{1}{54})$ となります.

注意してほしいこととして, 求める確率を

($r(x)$ の次数が 1 となる確率)

$\times$ ($g(x)$ が $r(x)$ で割り切れる確率)

とするのは誤りです. $r(x)$ の次数が 1 になる場合として, 例えば $a = 1, b = 4, c = 2$ のときがありますが, このとき $g(x)$ が $r(x)$ で割り切れません. すなわち, $r(x)$ の次数が 1 になる場合の中に $g(x)$ が $r(x)$ で割り切れる場合も含まれており, 単純にかけてはいけません. 「かつ」の確率だからかける, と短絡的にやるのはやめましょう.

それでは, 最後に基本の確認問題をつけておきますので, 必要に応じて使ってください.

check!

[1] 多項式 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ を多項式 $g(x) = x^2 - x + 2$ で割った商と余りを求めよ.

[2] 1 個のさいころを 3 回続けて投げ, 出た目の数を順に a, b, c とおく.

(1) $abc^2 = 2$ となる確率を求めよ.

(2) $\sqrt{a + b}$ が自然数となる確率を求めよ.

[3] 多項式 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 2x + 3$ が $g(x) = 2x + 1$ で割り切れるような実数の定数 a の値を求めよ.

【解答】

[1] 筆算をすることで

$$\text{商: } 2x - 2, \text{ 余り: } -3x + 3$$

である.

$$\begin{array}{r} 2x - 2 \\ x^2 - x + 2 \overline{) 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1} \\ \underline{2x^3 - 2x^2 + 4x} \\ -2x^2 - x - 1 \\ \underline{-2x^2 + 2x - 4} \\ -3x + 3 \end{array}$$

[2] (1) $abc^2 = 2$ となるとき, c^2 は 2 の約数である平方数であるから $c = 1$ に限られる. すると $ab = 2$ であるから, a, b, c の組は

$$(a, b, c) = (1, 2, 1), (2, 1, 1)$$

の 2 組ある. よって, 求める確率は

$$\frac{2}{6^3} = \frac{1}{108}$$

である.

(2) $2 \leq a + b \leq 12$

であるから, $\sqrt{a+b}$ が自然数となるのは

$$a + b = 4, 9$$

のときである. これを満たす a, b の組は

$$(a, b) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$$

$$(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$$

の 7 組あり, c は任意であるから, 求める確率は

$$\frac{7}{6^2} = \frac{7}{36}$$

である.

[3] $f(x)$ が $g(x)$ で割り切れる条件は

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}a - 1 + 3 = 0$$

$$\frac{1}{4}a = -\frac{7}{4}$$

$$\therefore a = -7$$

である.

<解答終>

なお, この確率の問題は文系と (2) までは共通問題でした. (3), (4) の設問が異なっていましたので, 興味がある人は文系の方の問題も確認してみてください.

【神大理系数学ゼミから】

今年度, 研伸館西宮校において, 神戸大学志望者を対象に, 実際に神戸大の問題を解いてもらうテストゼミを実施しています.

この問題を添削していて目についた点を紹介します.

(1) 筆算の間違いが数名. ここをミスすると, あとは (3) でしか点数が取れず苦しくなります. また, この計算に時間をかけすぎて, 後ろの小問まで手が回っていない答案もありました。「速く正確な」計算が求められます.

解答中の ①, ② から, a を消去して

$$1 - (b + 2c)c + 2c^2 = 0$$

$$bc = 1$$

$$\therefore b = c$$

とする答案もありました. これでももちろん正解ですが, (2) では ② を使えないので, 少し遠回りな解法になります.

答えは正しく出ていても, その理由が不十分な解答も目立ちました. 普段から, 問題を解く際, 答えだけでなく途中の過程を説明するようにする習慣をつけてください. 学年が若いうちからの意識が大事です.

(3) (1), (2) ができていなくても, この小問で点数を取っている答案は多かったです.

(4) この問題はほぼできていませんでした. 時間的にも難易度的にもきつかったようです.

受講者の感想も紹介しておきます.

- ・ 初歩的なミスが多すぎて点数が伸びていない. ミスを減らし、見直しをする。(医学部志望)
- ・ 時間が全然足りなくて, どう解けば良いか悩む

現役合格への 軌跡

時間を減らさないとと思った。(工学部志望)

- ・ 神大の問題は「マルチな単元の基本の組み合わせ」だと感じた。難問を沢山解くより、網羅型問題集の色々な単元の標準問題をスラスラ解けるようにする方が効率的だと感じた。(工学部志望)

それでは今回はここまでにしたいと思います。また次回をお楽しみに。

(数学科 川崎)