

今回は 2026 年度の大阪大学の理系・文系の第 2 問を解説したいと思います。

理系・文系 第 2 問

空間内に 4 点 O, A, B, C があり,

$$OA = OB = OC = 1$$

である。また,

$$\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ, \angle BOC = 60^\circ$$

である。t を正の実数とし、点 D, E は

$$\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE} = (2t+1)\overrightarrow{OC}$$

をみたす点とする。点 P は

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = -1, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 1$$

をみたして、さらに 4 点 A, D, E, P は同一平面上にある。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と t を用いて表せ。

(2) 実数 t が $t > 0$ の範囲を動くとき、 $|\overrightarrow{AP}|$ を最小にする t の値と、 $|\overrightarrow{AP}|$ の最小値を求めよ。

※なお本原稿における解答や解説は、大阪大学が公表したものではなく、研伸館が独自で作成したものです。

【解答】

(1) 条件より

$$\begin{aligned} |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| &= 1, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} &= 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

3 点 A, D, E は一直線上になく、4 点 A, D, E, P は同一平面上にあることから、実数 u, v を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= u\overrightarrow{AD} + v\overrightarrow{AE} \\ &= (-u-v)\overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{OD} + v\overrightarrow{OE} \\ &= (-u-v)\vec{a} + tu\vec{b} + (2t+1)v\vec{c} \end{aligned}$$

と表すことができるので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= (1-u-v)\vec{a} + tu\vec{b} + (2t+1)v\vec{c} \end{aligned}$$

となる。

よって、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = -1$ より

$$\begin{aligned} (1-u-v)|\vec{a}|^2 + tu\vec{a} \cdot \vec{b} \\ + (2t+1)v\vec{c} \cdot \vec{a} &= -1 \\ 1-u-v &= -1 \\ u+v &= 2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり、 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 1$ より

$$\begin{aligned} (1-u-v)\vec{a} \cdot \vec{b} + tu|\vec{b}|^2 \\ + (2t+1)v\vec{b} \cdot \vec{c} &= 1 \\ tu + (2t+1)v \cdot \frac{1}{2} &= 1 \\ 2tu + (2t+1)v &= 2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。①, ② より

$$u = 4t, v = -4t + 2$$

である。したがって

$$\overrightarrow{AP} = -2\vec{a} + 4t^2\vec{b} + (2-8t^2)\vec{c}$$

である。

(2) (1) より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + 16t^4|\vec{b}|^2 + (2-8t^2)^2|\vec{c}|^2 \\ &\quad - 16t^2\vec{a} \cdot \vec{b} + 8t^2(2-8t^2)\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &\quad - 4(2-8t^2)\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 4 + 16t^4 + (2-8t^2)^2 + 4t^2(2-8t^2) \\ &= 48t^4 - 24t^2 + 8 \\ &= 48\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + 5 \end{aligned}$$

である。 $|\overrightarrow{AP}| \geq 0$ より、 $|\overrightarrow{AP}|$ が最小となるのは $|\overrightarrow{AP}|^2$ が最小のときであるから、 $|\overrightarrow{AP}|$ は

$$t^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{2} \quad (\because t > 0)$$

のとき、最小値 $\sqrt{5}$ をとる。

【解説】

典型的な空間ベクトルの問題です。図形的な条件をベクトルで正しく表現することができるかが鍵になるでしょう。

(1) 線分の長さや角度の条件が与えられているので、内積を計算することができます。

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \angle BOC$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}$$

です。 $\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$ なので

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

ですね。「直角を見たら内積が0」は定番です。

次に4点が同一平面上にあることをベクトルを用いて言い換えましょう。

公式(同一平面上に存在する条件)

一直線上にない3点A, B, Cによって
定まる平面ABC上に点Dが存在するた
めの条件は

$$\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$$

を満たす実数 x, y が存在することで
ある。

上記の公式を用いて、 $\vec{AP}$ を $\vec{AD}$ と $\vec{AE}$ を用いて表すことができます。 $\vec{AD}, \vec{AE}$ は $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せますから、 $\vec{AP}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すことができますね。あとは解答中の u, v を決定すれば、(1) が解けたことになるわけですが、使っていない条件が

$$\vec{OA} \cdot \vec{OP} = -1, \vec{OB} \cdot \vec{OP} = 1$$

の2つあるので、これらを用いることで u, v を決定できます。これらの内積計算は事前に求めていた $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 等の値を用いることで容易に計算できます。計算ミスに気をつけてください。

(2) (1) で $\vec{AP}$ が求まっているので、 $|\vec{AP}|^2$ を計算できます。 $|\vec{AP}|$ は直接計算できないので、必ず2乗を計算しましょう。

$|\vec{AP}|^2$ を計算すると

$$48t^4 - 24t^2 + 8$$

となり、これは t の偶数乗のみの式(複二次式といえます)ですから、 t^2 を1つの文字と見て、整理しましょう。 $t^2 = X$ とおくと X の2次式ですから、平方完成して最小値が求まりますね。求め

ているのは2乗した値なので、最小値に $\sqrt{\quad}$ をつけるのを忘れないようにしてください。

さて、【解答】はベクトルを使って解きましたが、角度の条件に 90° があるときは座標を用いて解く方が計算が楽になることが多いです。以下、別解として座標を用いた解き方を示します。

【別解】

(1) 条件より

$$O(0, 0, 0), A(0, 0, 1),$$

$$B(1, 0, 0), C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

のように座標を設定しても一般性を失わない。

$$P(a, b, c)$$

とおくと、 $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = -1, \vec{OB} \cdot \vec{OP} = 1$ より

$$c = -1, a = 1$$

であるから、 $P(1, b, -1)$ となる。

$$\vec{AD} = t\vec{OB} - \vec{OA}$$

$$= (t, 0, -1)$$

$$\vec{AE} = (2t+1)\vec{OC} - \vec{OA}$$

$$= \left(\frac{2t+1}{2}, \frac{\sqrt{3}(2t+1)}{2}, -1\right)$$

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$$

$$= (1, b, -2)$$

である。

3点A, D, Eが一直線上になく、4点A, D, E, Pが同一平面上にあることから、実数 x, y を用いて

$$\vec{AP}$$

$$= x\vec{AD} + y\vec{AE}$$

$$= \left(tx + \frac{2t+1}{2}y, \frac{\sqrt{3}(2t+1)}{2}y, -x-y\right)$$

と表すことができる。よって

$$\begin{cases} tx + \frac{2t+1}{2}y = 1 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}(2t+1)}{2}y = b & \cdots \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y = -2 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

である。③, ⑤より

$$x = 4t, y = -4t + 2$$

現役合格への軌跡

であり、④に y の値を代入して

$$b = -\sqrt{3}(4t^2 - 1)$$

を得る.

よって

$$\begin{aligned}\vec{AP} &= (1, -\sqrt{3}(4t^2 - 1), -2) \\ &= -2(0, 0, 1) \\ &\quad + 4t^2(1, 0, 0) \\ &\quad + (2 - 8t^2)\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\ &= -2\vec{a} + 4t^2\vec{b} + (2 - 8t^2)\vec{c}\end{aligned}$$

である.

(2) (1)より

$$\vec{AP} = (1, -\sqrt{3}(4t^2 - 1), -2)$$

であるから

$$\begin{aligned}|\vec{AP}|^2 &= 1 + 3(4t^2 - 1)^2 + 4 \\ &= 3(4t^2 - 1)^2 + 5\end{aligned}$$

である. よって, $|\vec{AP}|$ は

$$4t^2 - 1 = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{2} \quad (\because t > 0)$$

のとき, 最小値 $\sqrt{5}$ をとる.

【別解説】

(1) $\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$ より, 平面 OBC と線分 OA が垂直ですから, A を z 軸上, B, C を xy 平面に設定することができます. 別解では

$$\vec{OA} \cdot \vec{OP} = -1, \vec{OB} \cdot \vec{OP} = 1$$

より, B を x 軸上に設定しました. 計算を簡単にするためです. これによって, P の x 座標と z 座標が決まります. あとは【解答】と同じように, 4 点が同一平面上にあることをベクトルで表し, 座標を用いて表記すると, 各座標の比較で b, x, y が求まります. 正直, 計算が楽になったかという微妙ですね.

ということで, 座標だからこそできる方法で P の位置 (b の値) を求めることにしましょう. 次の公式を利用します.

公式 (平面の方程式 (切片形))

3点 $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$

を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

である. ただし, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ である.

点 P は平面 ADE 上の点ですから, 平面 ADE と x 軸, y 軸, z 軸との交点が分かれば, 平面 ADE の方程式が求まります. x 軸, z 軸との交点はそれぞれ点 D, 点 A ですから, あとは y 軸との交点です. 点 D, E が xy 平面上にあることから, 求めたい y 軸との交点は DE と y 軸との交点です.

$$D(t, 0, 0),$$

$$E\left(\frac{2t+1}{2}, \frac{\sqrt{3}(2t+1)}{2}, 0\right)$$

より, xy 平面上の直線 DE の方程式は

$$y = \sqrt{3}(2t+1)(x-t) \quad (z=0)$$

ですから, 直線 DE と y 軸との交点の座標は

$$(0, -\sqrt{3}t(2t+1), 0)$$

となります. $t > 0$ より

$$t \neq 0, -\sqrt{3}t(2t+1) \neq 0$$

なので, 平面 ADF の方程式は

$$\frac{x}{t} + \frac{y}{-\sqrt{3}t(2t+1)} + \frac{z}{1} = 1$$

であり, P はこの平面上の点だから

$$\frac{1}{t} + \frac{b}{-\sqrt{3}t(2t+1)} + \frac{-1}{1} = 1$$

$$\therefore b = -\sqrt{3}(4t^2 - 1)$$

を得ます. この方法ならある程度計算は楽に済みますね.

P の座標を求めた後は, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を使って表して終わりです. z 成分は $\vec{a}$ のみに依存, y 座標は $\vec{c}$ のみに依存なので, 係数を決定するのはそこまで大変ではありません.

(2) 座標が分かっているので, $|\vec{AP}|$ を求めることができます. 今回の設定だと平方完成も勝手に終わっているので, 非常に楽ですね.

現役合格への 軌跡

今回は以上です。お疲れ様でした。

(数学科 栗野)