

今回は 2026 年度の神戸大学の理系の第 3 問を解説したいと思います。

理系 第3問

整数 m が性質 P をみたすとは、

$$m = |z^2|$$

が成り立つような実部と虚部が共に整数である複素数 z が存在することとする。以下の間に答えよ。

- (1) 性質 P をみたす整数 m で $30 < m < 40$ をみたすものをすべて挙げよ。
- (2) 性質 P をみたす整数 2 つの積は、性質 P をみたすことを証明せよ。
- (3) 4 で割った余りが 3 であるような整数は、性質 P をみたさないことを証明せよ。

(単元：整数 (数 A)、複素数平面 (数 C)、
配点：30 点)

【解答】

- (1) 複素数 $z = a + bi$ (a, b は実数) に対して

$$|z^2| = |z|^2 = a^2 + b^2$$

である。

したがって、整数 m が性質 P をみたす条件は

$$m = a^2 + b^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる整数 a, b が存在することである。

a, b を整数として、 $\textcircled{1}$ の形で表される整数 m ($30 < m < 40$) を求める (対称性より $a^2 \leq b^2$ として良い)。このとき

$$a^2 + b^2 < 40$$

であるから、 a^2, b^2 はいずれも 40 未満であり

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36$$

に限られる。これらのうち、2 数の和 (一致していても良い) が 30 より大きく 40 より小さいものを求めていくと

$$a^2 = 0 \text{ のとき, } b^2 = 36 \text{ で } m = 36$$

$$a^2 = 1 \text{ のとき, } b^2 = 36 \text{ で } m = 37$$

$$a^2 = 4 \text{ のとき, 適する } b \text{ は存在しない}$$

$$a^2 = 9 \text{ のとき, } b^2 = 25 \text{ で } m = 34$$

$$a^2 = 16 \text{ のとき, } b^2 = 16 \text{ で } m = 32$$

$$a^2 = 25, 36 \text{ のとき, 適する } b \text{ は存在しない}$$

となる。以上より、求める m は

$$m = 32, 34, 36, 37$$

である。

- (2) 2 つの整数 m, n が性質 P をみたすとする。このとき、実部と虚部が共に整数である複素数 z, w を用いて

$$m = |z^2|, n = |w^2|$$

と表される。すると、これら 2 数の積 mn は

$$\begin{aligned} mn &= |z^2| |w^2| \\ &= |z^2 w^2| \\ &= |(zw)^2| \end{aligned}$$

となる。ここで

$$z = a + bi, w = c + di$$

$$(a, b, c, d \text{ は整数})$$

とおくと

$$\begin{aligned} zw &= (a + bi)(c + di) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

であるから、 zw も実部と虚部が共に整数である複素数である。よって、積 mn も性質 P をみたす。 $\square$

- (3) 背理法で示す。4 で割った余りが 3 である整数 m が性質 P をみたす、すなわち

$$m = a^2 + b^2$$

となる整数 a, b が存在すると仮定して矛盾を導く。

整数 a に対して、 a と a^2 を 4 で割った余りは次表のようになる。

$a \pmod{4}$	0	1	2	3
$a^2 \pmod{4}$	0	1	0	1

したがって、 a^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であり、 b^2 についても同様である。すると、

現役合格への軌跡

$a^2 + b^2$ を 4 で割った余りは次表のようになり、3 にはならない。

$a^2 \pmod{4}$	$b^2 \pmod{4}$	$a^2 + b^2 \pmod{4}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

よって、 $m = a^2 + b^2$ となる整数 a, b が存在するとしたことに矛盾するので、4 で割った余りが 3 であるような整数は、性質 P をみたさないことが示された。□

<解答終>

【解説】

今回の問題は、複素数平面と整数の融合問題でした。メインは整数ですが、複素数の基本的な計算ができるかどうかで、処理量に差がつきます。2026 年度の神戸大理系数学では、第 1 問と第 3 間に整数の要素が、第 3 問と第 5 間に複素数平面の要素が含まれており、これらの単元が苦手だと、思うように得点できないセットでした。融合問題の形で多くの単元が出題されているので、苦手な単元を作らないことが非常に大事です。

以下、設問ごとに補足や別解を述べます。

(1) 性質 P をまず正しく把握しましょう。

$z = a + bi$ と z の実部・虚部を設定すると

$$|z^2| = |z|^2 = a^2 + b^2$$

です。ここが差がつく一歩目で、左側の等号をしっかりと理解してください。一般に複素数 z, w に対して

$$|zw| = |z||w| \quad \cdots (*)$$

が成り立ちます。これは

$$\begin{aligned} z &= r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ w &= r_2(\cos \beta + i \sin \beta) \end{aligned}$$

と極形式で表して

$$\begin{aligned} zw &= r_1 r_2 (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= r_1 r_2 \{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ &\quad + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)\} \end{aligned}$$

$$= r_1 r_2 \{\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)\}$$

となることから示せます ($z = 0$ または $w = 0$ のときも明らかに成立します)。

したがって

$$|z^2| = |z \cdot z| = |z||z| = |z|^2$$

とできるわけです。当たり前とも思える細かいことですが、これを使わずに計算すると

$$\begin{aligned} |z^2| &= |(a^2 - b^2) + 2abi| \\ &= \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)^2} \\ &= a^2 + b^2 \quad (\because a^2 + b^2 \geq 0) \end{aligned}$$

と遠回りをするようになります。(2) にも効いてくるのでしっかりおさえてください。

というわけで、性質 P をみたす整数というのは 2 つの平方数 (0 を含む) の和で表される整数ということになります。(1) では $30 < m < 40$ という条件がついていますので、絞り込みが可能です。40 未満の平方数は 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36 の 7 個に限られるので、これらから 2 つの和をとって 30 と 40 の間に入るものを調べます。漏れが怖いので、解答では $a^2 \leq b^2$ と順序を入れて a^2 の値を決め、それに対して適する b^2 を探す方針で調べ上げました。 $a^2 = b^2 = 16$ の場合を見落としがちなので、注意してください。

(2) 性質 P をみたす 2 つの整数 m, n (一致していても良い) に対して、積 mn も性質 P をみたすことを示します (これを「性質 P が積について閉じている」と言います)。

m, n は性質 P をみたすことから、実部と虚部が共に整数である複素数 z, w で

$$m = |z^2|, n = |w^2|$$

となるものが存在します。すると (*) を用いることで

$$\begin{aligned} mn &= |z^2||w^2| \\ &= |z^2 w^2| \\ &= |(zw)^2| \end{aligned}$$

となり、 mn が複素数 zw の 2 乗の絶対値で表せることが分かります。ここで終わってはダメで、 zw

現役合格への軌跡

の実部と虚部が整数であることを最後に示してください。これは

$$z = a + bi, w = c + di$$

(a, b, c, d は整数)

と実部・虚部を設定して計算すれば容易に示せます。

(*) を使うことで計算が簡単になるのですが、使わないと①の形から攻めていく、以下のような解答になります。

<別解>

2つの整数 m, n が性質 P をみたすとする。このとき

$$m = a^2 + b^2$$

$$n = c^2 + d^2$$

となる整数 a, b, c, d が存在する。すると

$$\begin{aligned} mn &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \quad \dots\dots(**) \end{aligned}$$

であり、 $ac - bd, ad + bc$ はいずれも整数であるから、積 mn も性質 P をみたす。

<別解終>

(**) が見えるかどうかの勝負です。本番この部分で手が止まってしまった受験生も多かったのではないかと思います。

- (3) 最後に剰余についての問題です。示すことが「4で割って3余る整数は性質 P をみたさない」と否定の形をしていますので、証明の方針としては背理法でいきましょう。すなわち、4で割って3余る整数 m が整数 a, b を用いて $m = a^2 + b^2$ と表されるとして矛盾を導きます。「4で割った余り」が鍵になる問題ですので、この問題は複素数の絶対値ではなく、解答中の①の形で考えていきます。

整数を4で割った余りは0, 1, 2, 3の4通りしかなく、さらに2乗すると0, 1の2通りに限られます。解答では0, 1, 2, 3を2乗して表に

まとめましたが、 n を整数として

$$(2n)^2 = 4n^2, (2n-1)^2 = 4(n^2 - n) + 1$$

から、偶数の2乗を4で割った余りは0、奇数の2乗を4で割った余りは1と示しても構いません。結局、 $a^2 + b^2$ を4で割った余りが0+0, 0+1, 1+1のいずれかになり、3にはならないことから矛盾が示せます。余りを考えることで、調べる場合を有限にできるのがポイントです。整数問題ではよく使う手法ですので必ずマスターしてください。

本問は(1), (2), (3)と小問に分かれていますが、小問同士のつながりは無く、どの小問からでも手を付けられるようになっていました。神戸大には珍しいタイプの問題ですが、点数を取れるところからしっかり取る姿勢が大事です。医学部志望であれば完答を、他学部志望であれば小問2問分程度を取りたい問題です。

それでは、最後に基本の確認問題をつけておきますので、必要に応じて使ってください。

check!

- [1] $\alpha = 1 + 2i, \beta = 2 - i$ とするとき、 $|\alpha\beta|$ を求めよ。
- [2] 20以下の自然数で、 $a^2 + b^2$ (a, b は $0 \leq a \leq b$ をみたす整数) の形で表されるものをすべて求めよ。
- [3] 集合 A を $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \text{ は整数}\}$ で定める。このとき、 A に属する2数の積は A に属することを示せ。
- [4] 整数 a, b, c が $a^2 + b^2 = c^2$ をみたすとき、 a, b の少なくとも一方は3の倍数であることを示せ。

【解答】

$$\begin{aligned} [1] \quad |\alpha| &= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\ |\beta| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

現役合格への軌跡

であるから

$$\begin{aligned} |\alpha\beta| &= |\alpha||\beta| \\ &= 5 \end{aligned}$$

である.

$$[2] \quad a^2 + b^2 \leq 20, 0 \leq a \leq b$$

より, a^2, b^2 は 0, 1, 4, 9, 16 に限られる.

$a^2 = 0$ のとき, $b^2 = 1, 4, 9, 16$ で

$$a^2 + b^2 = 1, 4, 9, 16$$

$a^2 = 1$ のとき, $b^2 = 1, 4, 9, 16$ で

$$a^2 + b^2 = 2, 5, 10, 17$$

$a^2 = 4$ のとき, $b^2 = 4, 9, 16$ で

$$a^2 + b^2 = 8, 13, 20$$

$a^2 = 9$ のとき, $b^2 = 9$ で

$$a^2 + b^2 = 18$$

$a^2 = 16$ のとき, b^2 は存在しない

となるので, 求める自然数は

$$1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, \\ 13, 16, 17, 18, 20$$

である.

$$[3] \quad A \text{ に属する 2 数 } x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2} \text{ を} \\ \text{とる } (a, b, c, d \text{ は整数}). \text{ このとき}$$

$$\begin{aligned} xy &= (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) \\ &= ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2} \end{aligned}$$

であり, $ac + 2bd, ad + bc$ はいずれも整数であるから, 積 xy も A に属する.

$$[4] \quad \text{背理法で示す. } a, b \text{ がいずれも 3 の倍数でない} \\ \text{として矛盾を導く.}$$

整数 n に対して, n と n^2 を 3 で割った余りは次表のようになる.

$n \pmod{3}$	0	1	2
$n^2 \pmod{3}$	0	1	1

したがって, n^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 であり, 特に n が 3 の倍数でないとき, n^2 を 3 で割った余りは 1 となる.

すると, a, b がいずれも 3 の倍数でないとき, a^2, b^2 を 3 で割った余りはいずれも 1 であるか

ら, $\text{mod } 3$ で見て

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ &\equiv 1 + 1 \\ &\equiv 2 \end{aligned}$$

となるが, c^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 であるから矛盾が生じる.

よって, a, b の少なくとも一方は 3 の倍数である.

<解答終>

【神大理系数学ゼミから】

今年度, 研伸館西宮校において, 神戸大学志望者を対象に, 実際に神戸大の問題を解いてもらうテストゼミを実施しています.

この問題を添削していて目についた点を紹介します.

(1) $|z^2| = |z|^2$ が見えず, 計算で時間をロスする
 答案が目立ちました. 受講者の感想にも「複素数の基本が分かっていなかった」との声が多くありました. 「基本事項を一つ一つ理解できていますか?」という神戸大からのメッセージです. その意味では差がつく良問だと思います.

$m = a^2 + b^2$ の形に表してから, 単に答えをいくつか書いた答案や, 答えに漏れが出た答案もありました. 答えを書くだけではなく, 答えがそれだけであることの証明も求められていると考えてください.

(2) 複素数の条件で立式するのが簡単ですが, その方針はほとんどいませんでした.

$$m = a^2 + b^2, n = c^2 + d^2$$

から

$$mn = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

を導いていたのは 1 人だけでした.

$m = |z^2|, n = |z|^2$ と同じ z で置いてしまうミスもありました.

(3) $m = 4k + 3$ (k は整数) として止まっている答案が目立ちました. 余りで分類する典型問題ですが, 最後の小問ということもあり, 上手く対処できなかったようです.

現役合格への 軌跡

受講者の感想も紹介しておきます。

- ・ 複素数の範囲は基礎からしっかり固めていかないといけないと分かった。（農学部志望）
- ・ 解き方を思いつくのに時間がかかったため、演習をたくさんして慣れるようにしたい。（工学部志望）
- ・ いつも誘導に乗ることしかないと思っていたけれど、何も考えずに前の問題を使おうとするのではなく、どの条件を使うかしっかり考えなくてはいけないと分かりました。（医学部志望）

今回はここまでにしたいと思います。また次回をお楽しみに。

（数学科 川崎）