

今回は 2026 年度の神戸大学の理系の第 5 問を解説したいと思います。

理系 第5問

r を正の実数とする。複素数 α が

$$(1+r^2)\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

をみたすとする。複素数平面上の 3 点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(1)$ について以下の問に答えよ。

- (1) 次の条件をみたす円 C が存在することを証明し、 C の中心を表す複素数と C の半径を求めよ。

条件 「すべての正の実数 r に対して、

A は C 上にある。」

- (2) $t > 0$ とし、 $r = te^{-t}$ とする。 $t > 0$ における $\triangle OAB$ の面積の最大値とそれを与える t を求めよ。

(単元：複素数平面 (数 C)、式と曲線 (数 C)、微分法 (数 III)、配点：30 点)

【解答】

- (1) $r > 0$ より、 $1+r^2 > 0$ であるから

$$(1+r^2)\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (1+r^2)}}{1+r^2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{1+r^2} \pm \frac{r}{1+r^2}i \quad (\because r > 0)$$

である。

$$\alpha = \frac{1}{1+r^2} + \frac{r}{1+r^2}i \text{ のとき}$$

$$X = \frac{1}{1+r^2}, Y = \frac{r}{1+r^2}$$

とすると

$$\begin{aligned} & \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 \\ &= \left(\frac{1}{1+r^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{1+r^2}\right)^2 \\ &= \frac{(1-r^2)^2 + 4r^2}{4(1+r^2)^2} \\ &= \frac{(1+r^2)^2}{4(1+r^2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}$$

であるから、 $A(\alpha)$ は

$$\text{円} : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

上にある。

$$\alpha = \frac{1}{1+r^2} - \frac{r}{1+r^2}i \text{ のとき、同様に}$$

$$X = \frac{1}{1+r^2}, Y = -\frac{r}{1+r^2}$$

とすると

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{1}{4}$$

が成り立つので、このときも $A(\alpha)$ は $\textcircled{1}$ 上にある。

以上より、条件をみたす円 C として $\textcircled{1}$ が存在し、その中心を表す複素数は $\frac{1}{2}$ 、半径は $\frac{1}{2}$ である。

- (2) $f(t) = te^{-t}$ とする。 $t > 0$ において

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{-t} - te^{-t} \\ &= e^{-t}(1-t) \end{aligned}$$

であり、 $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	(0)	...	1	...	(∞)
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	(0)	↗	$\frac{1}{e}$	↘	

よって、 $f(t) > 0$ に注意すると、 $r(=f(t))$ のとりうる値の範囲は

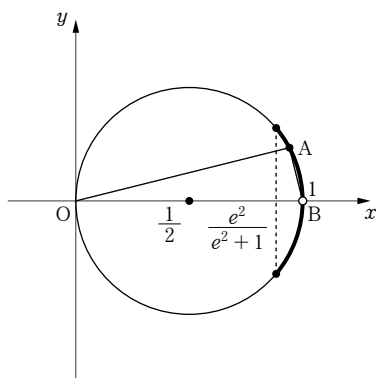
$$0 < r \leq \frac{1}{e} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

である。

次に点 A の x 座標 (実部) $X = \frac{1}{1+r^2}$ について考える。 X は $\textcircled{2}$ のとき r について単調減少であるから、 X のとりうる値の範囲は

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{e}\right)^2} &\leq X < 1 \\ \frac{e^2}{e^2+1} &\leq X < 1 \end{aligned}$$

である。



(1) より、点 A は ① 上にあり、 $\triangle OAB$ の面積は A の y 座標 (虚部) の絶対値が最大のときに最大となる。

$$\frac{e^2}{e^2+1} = 1 - \frac{1}{e^2+1} > \frac{1}{2} \quad (\because e^2 > 1)$$

に注意すると、点 A の y 座標の絶対値が最大となるのは $X = \frac{e^2}{e^2+1}$ のときである。このとき、 $t = 1$, $r = \frac{1}{e}$ であり、点 A の y 座標の絶対値は

$$\frac{\frac{1}{e}}{1 + \left(\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{e}{e^2+1}$$

である。よって、 $\triangle OAB$ の面積の最大値は

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{e}{e^2+1} = \frac{e}{2(e^2+1)}$$

であり、このときの t の値は

$$t = 1$$

である。

<解答終>

【解説】

今回は、複素数平面・曲線 (パラメータ表示) と数 III 微分法の融合問題でした。(1) から取り組みにくく、難易度の高い問題です。医学部志望者でこの問題が取れば周りよりリードすることができたのではないかと思います。

以下、設問ごとに補足や別解を述べます。

(1) まず α が

$$(1+r^2)\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

をみたす複素数と定義されます。これは、方程式

$$(1+r^2)z^2 - 2z + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

が $z = \alpha$ を解にもつということです。方程式 (*) は実数係数で、 $1+r^2 > 0$ より 2 次なので、まずは解の公式でこの方程式を解いてしまいましょう。すると α は

$$\frac{1}{1+r^2} + \frac{r}{1+r^2}i, \quad \frac{1}{1+r^2} - \frac{r}{1+r^2}i$$

のいずれかの値であることが分かります。

これらは共役な複素数なので、複素数平面上では実軸に関して対称に位置します。よって、片方の複素数の存在範囲が分かれば、もう片方の存在範囲は実軸対称移動で簡単に分かります。このことから、まずは

$$\alpha = \frac{1}{1+r^2} + \frac{r}{1+r^2}i$$

のときの $A(\alpha)$ の存在範囲を考えましょう。

問題文から、 α はある円周上にあるようですので、それを示します。

$$X = \frac{1}{1+r^2}, \quad Y = \frac{r}{1+r^2}$$

として、解答では

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{1}{4} \quad (\text{一定})$$

となることを示しました。これにより、 $A(\alpha)$ は

$$\text{円} : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

上にあることになり、問題文の「条件」をみたす円 C の存在が言えます。

「そんなのアリ？」と思うかもしれませんが、「存在することを示せ」なので「存在しました」と証明すればおしまいです。どのようにその円を見つけたかを答案に書く必要はありません。

もちろん、いきなりこの円が見えるわけではなく、解答の裏では次のような計算をしています。

<計算例 1>

$$X = \frac{1}{1+r^2} \quad \cdots \cdots ③$$

$$Y = \frac{r}{1+r^2} \quad \cdots \cdots ④$$

現役合格への 軌跡

とする. $X \neq 0$ に注意して

$$\frac{Y}{X} = r \quad \dots\dots ⑤$$

である. これと ③ より

$$X = \frac{1}{1 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2}$$

$$X = \frac{X^2}{X^2 + Y^2}$$

$$1 = \frac{X}{X^2 + Y^2} \quad (\because X \neq 0)$$

$$X^2 + Y^2 = X$$

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{1}{4}$$

である. また, $r > 0$, $X > 0$ と ⑤ より

$$X > 0, Y > 0$$

である.

※ この議論と, 先に述べた実軸 (x 軸) についての対称性から, 点 $A(\alpha)$ の軌跡は

$$\text{円} : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

(ただし, 2 点 $(0, 0)$, $(1, 0)$ を除く)

となることが分かります.

※ 式変形の方針としては, 分母の $1 + r^2$ (2 次式) を消去することが最優先です. $X \neq 0$ に注意して, X と Y の比をとることで, r の 1 次式を作り, r を消去しましょう.

<計算例 2>

複素数のまま処理することもできます.

$$\alpha = \frac{1}{1 + r^2} + \frac{r}{1 + r^2}i$$

とくと

$$\alpha + \bar{\alpha} = \frac{2}{1 + r^2}$$

$$\alpha\bar{\alpha} = \frac{1 + r^2}{(1 + r^2)^2} = \frac{1}{1 + r^2}$$

である (これは解と係数の関係からも分かる). す
ると

$$\alpha\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha})$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\bar{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\left|\alpha - \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \left|\alpha - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

である. よって, $A(\alpha)$ は複素数平面上で点 $\left(\frac{1}{2}\right)$ 中心, 半径 $\frac{1}{2}$ の円上にある.

※ この方針の場合, $A(\alpha)$ がこの円のどの部分を動きうるかまでは分からないことに注意してください.

<計算例 3>

三角関数を用いた特殊な置換も紹介します.

$$r = \tan \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

とくと

$$X = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$= \cos^2 \theta$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

であり

$$Y = \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos^2 \theta$$

$$= \sin \theta \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

である.

よって

$$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{2}(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

と表せて, $0 < 2\theta < \pi$ であるから, 点 $A(\alpha)$ の軌跡は

$$\text{円} : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ の } y > 0 \text{ の部分}$$

である.

x 軸についての対称性 ($\bar{\alpha}$ の分) も考慮すると, 点 A の軌跡は

$$\text{円} : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

(ただし, 2 点 $(0, 0)$, $(1, 0)$ を除く)

である.

※ 一般に

$$\overrightarrow{OP} = (a, b) + r(\cos \theta, \sin \theta)$$

現役合格への軌跡

で表される点 P は

中心 (a, b) , 半径 r

の円周上にあります. θ の範囲を見ることで, この円のどの部分を P が動くかが分かります.

<計算例 4> (必要条件から絞る)

$r = 1$ のとき, $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ であり, $r \rightarrow +0$ のとき A は点 $(1, 0)$ に, $r \rightarrow \infty$ のとき A は点 $(0, 0)$ に近づく. よって, 求める円はこれら 3 点を通る円であることが予想できる.

このように, 様々な解法が考えられますが, 円を見つけ, その円上に A があることをしっかり示してください.

(2) 次に, 図形量 (面積) の最大値を求める問題です. O と B は実軸上の定点ですので, 線分 OB を底辺と見て, 高さが最大になるときを考えましょう. すなわち, 点 A の y 座標 (虚部) の絶対値 $\frac{r}{1+r^2}$ が最大になるときを考えます.

まず, $r = te^{-t}$ ($t > 0$) と, r が t の関数で与えられていますので, r の範囲を求めましょう. これをやらす, $\frac{r}{1+r^2} = \frac{te^{-t}}{1+(te^{-t})^2}$ として t の関数と見て処理しても解けますが, 計算が大変になります.

$f(t) = te^{-t}$ として微分し, 増減表を書くことで, r の範囲として解答中の ② を得ます. 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t}$ は非自明ですが, これを求めなくても常に $r > 0$ であることと増減表から, r の下限は 0 であることが分かります.

ここから, 普通は $g(r) = \frac{r}{1+r^2}$ として, ②における $g(r)$ の最大値を計算するのですが, 解答ではこの計算を省略する方法を取りました. 点 A の y 座標ではなく x 座標の範囲に注目します. $X = \frac{1}{1+r^2}$ ですので, x 座標は $r(>0)$ について単調減少で, とりうる範囲が (微分を使わなくても) 求まります. 実際に求めると $\frac{e^2}{e^2+1} \leq X < 1$ となり, $\frac{e^2}{e^2+1} > \frac{1}{2}$ に注意すると, 点 A は図中の太線部分に存在することが分かります. すると, y 座標の絶対値が最

大になるのは $X = \frac{e^2}{e^2+1}$ のときで, このとき $r = \frac{1}{e}$, $t = 1$ ですので, これらを用いて A の y 座標を求めることで, 面積の最大値を得ます.

念のため, 上記の $g(r)$ を微分して最大値を求める計算も記載しておきます.

<別解>

$$g(r) = \frac{r}{1+r^2} \quad (\text{点 A の } y \text{ 座標の絶対値})$$

として, $0 < r \leq \frac{1}{e}$ での $g(r)$ の最大値を求める.

$$\begin{aligned} g'(r) &= \frac{1+r^2-r \cdot 2r}{(1+r^2)^2} \\ &= \frac{(1+r)(1-r)}{(1+r^2)^2} \\ &> 0 \quad \left(\because 0 < r \leq \frac{1}{e} < 1 \right) \end{aligned}$$

であるから, $g(r)$ は単調に増加し, 最大値は

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\frac{1}{e}}{1+\left(\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{e}{e^2+1}$$

である.

よって, 求める $\triangle OAB$ の面積の最大値は

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{e}{e^2+1} = \frac{e}{2(e^2+1)}$$

であり, このとき $t = 1$ である.

<別解終>

(2) はどの変数でどう処理するかで計算量が変わってきます. この 1 問にかかる時間が短くなるほど, 他の問題へ時間をかけることができますので, 「もっと速く解くには」という視点をもって問題に取り組んでください.

それでは, 最後に基本の確認問題をつけておきますので, 必要に応じて使ってください.

check!

[1] t を実数とし、 $P\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ とする。このとき、点 P は単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にあることを示せ。

[2] 関数 $f(x) = xe^x$ の最小値を求めよ。

[3] 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上に 2 点 $A(1, 0)$, $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる。点 C が短い方の弧 AB 上を動くとき、 $\triangle ABC$ の面積が最大となる C の座標を求めよ。

【解答】

$$[1] \quad X = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad Y = \frac{2t}{1+t^2}$$

とすると

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 \\ &= \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

よって、点 $P(X, Y)$ は単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある。

※ 点 P の軌跡を厳密に求めると次のようになります。

$$X = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \dots\dots ①$$

$$Y = \frac{2t}{1+t^2} \quad \dots\dots ②$$

とおく。① から

$$X = -1 + \frac{2}{1+t^2} \quad \dots\dots ①'$$

であり

$$X+1 = \frac{2}{1+t^2} \neq 0$$

である。よって、② と合わせて

$$\frac{Y}{X+1} = t$$

である。これと ①' より

$$X+1 = \frac{2}{1+\left(\frac{Y}{X+1}\right)^2}$$

$$X+1 = \frac{2(X+1)^2}{(X+1)^2 + Y^2}$$

$$1 = \frac{2(X+1)}{(X+1)^2 + Y^2} \quad (\because X+1 \neq 0)$$

$$(X+1)^2 + Y^2 = 2(X+1)$$

$$X^2 + Y^2 = 1$$

である。

以上より、点 P の軌跡は

$$\text{円} : x^2 + y^2 = 1$$

(ただし、点 $(-1, 0)$ を除く)

である。

$$\ast \tan \frac{\theta}{2} = t \text{ とおくと}$$

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

となります。積分計算で使える置換ですのでおさえておいてください。

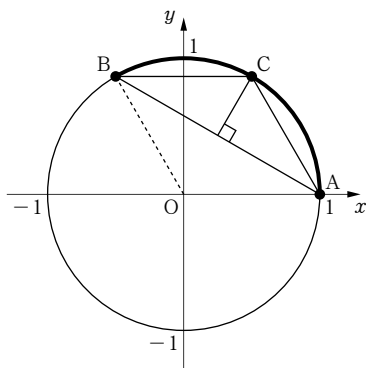
$$[2] \quad f'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$(-\infty)$	$\dots$	-1	$\dots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	

よって、 $f(x)$ の最小値は $-\frac{1}{e}$ である。

[3] AB を底辺と見ると、 $\triangle ABC$ の面積が最大となるのは、点 C と線分 AB の距離 d が最大になるときである。線分 AB に平行な直線を引いて考えると、この直線が円に接し、その接点が C になるときに d は最大になる。このとき、 C は短い方の弧 AB の中点である。



$$A(\cos 0, \sin 0), B\left(\cos \frac{2}{3}\pi, \sin \frac{2}{3}\pi\right)$$

であるから、求める点 C の座標は

$$\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

すなわち

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。

<解答終>

【神戸大学理学部数学科から】

今年度、研伸館西宮校において、神戸大学志望者を対象に、実際に神戸大の問題を解いてもらうテストゼミを実施しています。

この問題を添削していて目についた点を紹介します。

(1) α を r で表すところで止まっている答案が多く、出来は非常に悪かったです。分母が 2 次になる形のパラメータ表示の処理の仕方が分かっていない人が多い印象でした。

問題の意味が取れていない答案も半分ぐらいあり、答えの円の式に r が入ってしまっている答案が目立ちました。どんな $r (> 0)$ に対しても A がその上にある円を求めるので、答えに r が入るのはおかしいと気付きたいところです。

(2) (1) ができずに諦めてしまう答案が大半でした。
(1) を使うと確かに (2) の計算量を減らせるのですが、(1) を使わなくても (2) を解くことが可能

です。視野を広くもって、取れる部分の点数をもぎ取る、ぐらゐの姿勢がこのような難問には求められます。

r が t の関数で与えられていますが、これを A の座標 (複素数) に代入して、複雑になってしまっている答案もありました。先を見通して、どうすれば計算が楽になるかも考えながら解き進めましょう。

受講者の感想も紹介しておきます。

- ・ 難しい問題は正しいことを書いて点数を稼ぐのが大事なことを学びました。(工学部志望)
- ・ (1) が解けなくても (2) を考えてみるのが大事と分かりました。(システム情報学部志望)
- ・ 出来なくて焦りましたが、難問と聞いて安心しました。(医学部志望)

今回はここまでにしたいと思います。また次回をお楽しみに。

(数学科 川崎)