

今回は 2026 年度の大阪大学の理系の第 3 問を解説したいと思います。

理系 第 3 問

a を実数とし、複素数 z に対して

$$f(z) = \frac{(1 - ai)z + (1 + ai)\bar{z}}{2}$$

とする。ただし、 i は虚数単位、 $\bar{z}$ は z と共役な複素数である。

(1) $f(z)$ は実数であることを示せ。

(2) 実数 a に対して、 $|z| = 1$ かつ

$$f(z)\{f(z) - f(i) - 2\} = -2f(i)$$

となるような複素数 z の個数を $N(a)$ とする。 $N(a)$ を求めよ。

※なお本原稿における解答や解説は、大阪大学が公表したものではなく、研伸館が独自で作成したものです。

【解答】

(1) a は実数より

$$\begin{aligned} \overline{f(z)} &= \frac{\overline{(1 - ai)z + (1 + ai)\bar{z}}}{2} \\ &= \frac{(1 + ai)\bar{z} + (1 - ai)z}{2} \\ &= \frac{(1 - ai)z + (1 + ai)\bar{z}}{2} \\ &= f(z) \end{aligned}$$

である。よって、 $f(z)$ は実数である。□

$$(2) \quad f(i) = \frac{(1 - ai)i + (1 + ai) \cdot (-i)}{2} = a$$

であるから

$$\begin{aligned} f(z)\{f(z) - f(i) - 2\} &= -2f(i) \\ f(z)\{f(z) - a - 2\} &= -2a \\ \{f(z)\}^2 - (a + 2)f(z) + 2a &= 0 \\ \{f(z) - a\}\{f(z) - 2\} &= 0 \quad \dots\dots\dots ① \end{aligned}$$

である。

$|z| = 1$ より、 $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす θ を用いて

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad \dots\dots\dots ②$$

とおける。このとき z と θ は 1 対 1 に対応するから、 z と θ が 1 対 1 に対応することから、① かつ ② を満たす θ の個数を求めればよい。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \{(1 - ai)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &\quad + (1 + ai)(\cos \theta - i \sin \theta)\} \\ &= \cos \theta + a \sin \theta \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

である。ただし、 α は

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

を満たす実数である。 $\alpha \leq \theta + \alpha < 2\pi + \alpha$ より、 $f(z)$ の変域は

$$-\sqrt{a^2 + 1} \leq f(z) \leq \sqrt{a^2 + 1}$$

であり、 $f(z)$ の値を 1 つ定めたとき、それに対応する θ の個数は

$$f(z) = \pm \sqrt{a^2 + 1} \text{ のとき} \quad 1 \text{ 個}$$

$$-\sqrt{a^2 + 1} < f(z) < \sqrt{a^2 + 1} \text{ のとき} \quad 2 \text{ 個}$$

である。

$$|a| = \sqrt{a^2} < \sqrt{a^2 + 1}$$

より

$$-\sqrt{a^2 + 1} < a < \sqrt{a^2 + 1}$$

であるから、 $f(z) = a$ を満たす θ の個数は a の値によらず 2 個である。

(i) $a = 2$ のとき、① は

$$f(z) = 2 (= a)$$

となるから、これを満たす θ の個数は 2 個である。

(ii) $a \neq 2$ のとき、① は

$$f(z) = 2, a$$

となる。

$$(ア) \quad \sqrt{a^2 + 1} < 2, \text{ つまり, } -\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \text{ のとき}$$

$f(z) = 2$ かつ ② を満たす θ が存在しないので、① かつ ② を満たす θ の個数は 2 個である。

現役合格への軌跡

(イ) $\sqrt{a^2+1}=2$, つまり, $a=\pm\sqrt{3}$ のとき
 $f(z)=2$ かつ ② を満たす θ の個数が 1
 個なので, ① かつ ② を満たす θ の個数は
 3 個である.

(ウ) $\sqrt{a^2+1}>2$, つまり, $a<-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}<a$ のとき
 $f(z)=2$ かつ ② を満たす θ の個数が 2
 個なので, ① かつ ② を満たす θ の個数は
 4 個である.

以上より

$$N(a) = \begin{cases} 2 & (-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}, a=2) \\ 3 & (a=\pm\sqrt{3}) \\ 4 & (a < -\sqrt{3}, \sqrt{3} < a < 2, 2 < a) \end{cases}$$

である.

【解説】

複素数平面の問題です, と言ったものの実際に複素数平面の知識を使っているのは $|z|=1$ から z を極形式でおくところのみと言っても過言ではなく, 複素数(虚数)に関わる処理は数Ⅱ範囲に収まっています.

(1) 実数であることを示すには, 以下の実数条件を使うことが多いです.

公式(実数条件)

複素数 z が実数であるための条件は

$$\bar{z} = z$$

である.

共役な複素数がもとの複素数と等しいことを示せばよいです. 【解答】でも

$$\overline{f(z)} = f(z)$$

を証明しています.

これぐらいの式であれば, x, y を実数として

$$z = x + yi$$

とにおいて, $f(z)$ を計算し, a, x, y だけで表されることを示すという方法でもよいでしょう. い

ずれにせよ, (2) で $f(z)$ を求めることになるので, 悪くない方針かもしれません.

(2) (1) より, $f(i)$ は(計算しなくても)何かしらの実数であり

$$\begin{aligned} f(z)\{f(z)-f(i)-2\} &= -2f(i) \\ \{f(z)\}^2 - \{f(i)+2\}f(z) + 2f(i) &= 0 \\ \{f(z)-f(i)\}\{f(z)-2\} &= 0 \\ \therefore f(z) &= f(i), 2 \end{aligned}$$

のように, $f(z)$ について解くことができます. 「解ける方程式は解く」べきです.

次に, $|z|=1$ という条件の扱いです. 次の2つのことはいつでも引き出せるようにしておきましょう.

知識 $|z|=1$ のとき

① $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおける.

② $\bar{z} = \frac{1}{z}$ である.

今回は ① を利用しました. θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ に限定しておく, z と θ は 1 対 1 に対応するため, θ の個数を数える問題に言い換えられます.

① を $f(z)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos\theta + a\sin\theta \\ &= \sqrt{a^2+1}\sin(\theta+\alpha) \end{aligned}$$

となるので, あとは $f(z)$ と θ の個数の対応を考えれば, 条件を満たす θ の個数を求めることができます. $a=2$ のときは, $f(z)$ に関する 2 次方程式が重解となることに注意しましょう.

【解答】では三角関数を用いて, z つまり θ の個数を求めましたが, 次のように考えることもできます.

$$\begin{aligned} f(z) &= 2 \\ \cos\theta + a\sin\theta &= 2 \end{aligned}$$

を満たす θ の個数は

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + ay = 2 \end{cases}$$

現役合格への 軌跡

を満たす実数の組 (x, y) の個数として求めることができ、これは円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と直線 $l: x + ay = 2$ の共有点の個数として得られます。

この個数は、円 C の中心 $(0, 0)$ と直線 l との距離

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$$

と円 C の半径 1 の大小を調べることによって求めることができます。具体的には

$$\frac{2}{\sqrt{a^2+1}} < 1 \text{ のとき } \quad 2 \text{ 個}$$

$$\frac{2}{\sqrt{a^2+1}} = 1 \text{ のとき } \quad 1 \text{ 個}$$

$$\frac{2}{\sqrt{a^2+1}} > 1 \text{ のとき } \quad 0 \text{ 個}$$

です。 $f(z) = a$ についても同様にすればいいでしょう。こちらはどんな a の値でも 2 個になります。

今回は以上です。お疲れ様でした。

(数学科 栗野)