

強者の戦略

今回は 2026 年度の岡山大学理系の第 2 問を解説します。

理系第 2 問

座標平面上を繰り返し運動する点 P について考える．点 P は、はじめに原点 $O(0, 0)$ にあるとする．点 P は 1 回の運動で以下の確率に従って「移動する」または「移動しない」ものとする．

点 P が座標 (x, y) の位置にあるとき

- (a) 移動しない確率は $\frac{4}{9}$
- (b) $(x+1, y), (x-1, y), (x, y+1), (x, y-1)$ に移動する確率はそれぞれ $\frac{1}{9}$
- (c) $(x+1, y+1), (x-1, y+1), (x+1, y-1), (x-1, y-1)$ に移動する確率はそれぞれ $\frac{1}{36}$

この運動を繰り返す．正の整数 n に対して n 回運動後の点 P の座標を (x_n, y_n) とおく．以下の問いに答えよ．

- (1) $|x_1| = 1$ かつ $|y_1| = 1$ となる確率を求めよ．
- (2) $|x_n| = n$ かつ $|y_n| = n$ となる確率を求めよ．
- (3) $x_n = n$ となる確率を求めよ．
- (4) $|x_n| = n$ または $|y_n| = n$ となる確率を求めよ．

(単元：確率(数 A)，配点：50 点)

【解答】

- (1) $|x_1| = 1$ かつ $|y_1| = 1$ となるのは (c) の斜め 4 方向に移動するときのみであるから，求める確率は

$$4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

である．

- (2) n 回の運動の中で x 座標が $+1$ ， x 座標が -1 ， y 座標が $+1$ ， y 座標が -1 となる運動の回数をそ

れぞれ a, b, c, d 回とすると

$$(x_n, y_n) = (a-b, c-d) \quad (0 \leq a, b, c, d \leq n)$$

であるので， $|x_n| = n$ となるのは

$$(a, b) = (n, 0), (0, n)$$

のときである．また， $|y_n| = n$ となるのは

$$(c, d) = (n, 0), (0, n)$$

のときである．これらが同時に起こるのは，毎回の運動で x 座標も y 座標も同じ向きに 1 ずつ変化するとき，つまり (c) の 4 方向のうちのいずれか 1 つの方向に n 回移動するときであるから，求める確率は

$$4 \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^n = \frac{4}{36^n}$$

である．

- (3) (2) と同様に $x_n = a - b$ であるから， $x_n = n$ となるのは $(a, b) = (n, 0)$ のとき，つまり n 回の運動のすべてで x 座標が 1 増えるときである．

1 回の運動で x 座標が 1 増えるのは $(x+1, y), (x+1, y+1), (x+1, y-1)$ に移動するときであり，その確率は

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

である．よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{6^n}$$

である．

- (4) 事象 A, B を

$$A: |x_n| = n$$

$$B: |y_n| = n$$

とおく．(2) より A が起こるのは $(a, b) = (n, 0)$ または $(0, n)$ のときであり，この 2 つは互いに排反である．前者の確率は (3) より $\frac{1}{6^n}$ ，後者も同様にして $\frac{1}{6^n}$ であるから

$$P(A) = \frac{2}{6^n}$$

である．また，対称性より

$$P(B) = \frac{2}{6^n}$$

である．

強者の戦略

さらに、(2)より

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36^n}$$

である。したがって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{4}{6^n} - \frac{4}{36^n} \\ &= \frac{4(6^n - 1)}{36^n} \end{aligned}$$

となる。

【解説】

毎回独立に同じ試行を繰り返す運動の問題ですが、本問では確率漸化式を立てる必要はなく、各向きへ動いた回数を文字でおいて条件を整理することで直接確率を求めることができます。

・ $|x_n| = n$ の意味について

n 回のうち x 座標が $+1$ となる回数を a 、 -1 となる回数を b とすると、 x 座標が変化しない運動もあるので $x_n = a - b$ 、 $a + b \leq n$ です。したがって

$$|x_n| = |a - b| \leq a + b \leq n$$

となり、2つの等号がともに成り立つ、つまり $|x_n| = n$ となるのは

$$a, b \text{ の一方が } 0 \text{ で、かつ } a + b = n$$

であるとき、すなわち $(a, b) = (n, 0), (0, n)$ のときに限ります。

「 $|x_n|$ が n というぎりぎりの値をとる」という条件を「全部の回でぴったり同じ向きに x 軸方向へ動き続ける」という形に読み替えることが本問のポイントです。

・ x 軸方向の移動だけに着目した確率について

(3) では y 座標を考えず、 x 座標が 1 増える回数だけを問題にします。移動先が $(x+1, y)$ 、 $(x+1, y+1)$ 、 $(x+1, y-1)$ の 3通りとなるため、1回の運動で x 座標が 1 増える確率は

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

となります。この事象は y 座標の動きによらず毎回独立に確率 $\frac{1}{6}$ で起こるので、 $(a, b) = (n, 0)$ 、つまり $x_n = n$ となる確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ です。確率の積をとる際は、毎回の試行が独立であることを確認しましょう。

・(4)の和事象の確率について

(4) は「または」の確率なので、包除の原理を用います。

和事象の確率

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ここで $P(A \cap B)$ をすでに (2) で求めていることに気づくのが大切です。小問が「(1) で具体例 → (2) で積事象の一般化 → (3) で片側の条件 → (4) で和事象」と並んでおり、前の小問の結果を使う構造になっています。

このように小問同士のつながりに着目すると、「 B と A は対称だから $P(B) = P(A)$ である」「 $P(A \cap B)$ は (2) そのもの」と気づきやすく、計算を効率化できます。小問が多い問題では、前の小問が利用できないかを意識する習慣をつけましょう。

本問のポイントは

1. $|x_n| = n$ を $(a, b) = (n, 0), (0, n)$ 、つまり「全 n 回で x 軸方向に毎回同じ向きに 1 ずつ動く」と読み替えること
2. 1 回の運動で x 座標が 1 増える確率を求める際、移動先を漏れなく数え上げること
3. (4) では (2) と (3) の結果を活用し、包除の原理で和事象の確率を求めること

の 3 点でした。小問同士の関係を見抜くことで、計算の重複を避けることができる問題です。

今回は以上となります。お疲れ様でした。

数学科 松浦