現役合格への軌跡（きせき）

今回は 2026 年度の神戸大学の理系の第 4 問を解説したいと思います．

理系　第 4 問

$0 \leqq a \leqq \pi$ とする．関数 $f(x)$ は x の連続関数とし，

$$g(x)=\int_a^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1)　$g'(a)$ を求めよ．

(2)　$g''(x)$ を $f(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ．

(3)　条件「$g(x)=\sin x-\sin^2 x$」は，条件「$f(x)=\sin^2 x-2\cos^2 x$ かつ $a=\dfrac{\pi}{2}$」であるための必要十分条件であることを証明せよ．

（単元：微分法・積分法（数 III），配点：30 点）

【解答】

(1)　$$g(x)=\int_a^x f(t)\sin(x-t)\,dt$$
$$=\int_a^x f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)\,dt$$
$$=\underline{(\sin x)\int_a^x f(t)\cos t\,dt}$$
$$\underline{-(\cos x)\int_a^x f(t)\sin t\,dt}\quad\cdots\cdots①$$

であるから

$$g'(x)=(\cos x)\int_a^x f(t)\cos t\,dt$$
$$+f(x)\sin x\cos x$$
$$+(\sin x)\int_a^x f(t)\sin t\,dt$$
$$-f(x)\sin x\cos x$$
$$=(\cos x)\int_a^x f(t)\cos t\,dt$$
$$+(\sin x)\int_a^x f(t)\sin t\,dt\quad\cdots\cdots②$$

である．よって

$$g'(a)=0\quad\cdots\cdots③$$

である．

(2)　② をさらに微分して

$$g''(x)=\underline{(-\sin x)\int_a^x f(t)\cos t\,dt}$$
$$+f(x)\cos^2 x$$
$$\underline{+(\cos x)\int_a^x f(t)\sin t\,dt}$$
$$+f(x)\sin^2 x$$
$$=\underline{-g(x)}+f(x)\quad(\because\quad①)$$

である．

(3)　条件 A，B を

$$A：g(x)=\sin x-\sin^2 x$$
$$B：f(x)=\sin^2 x-2\cos^2 x$$
$$\text{かつ}\ \ a=\frac{\pi}{2}$$

と定める．

・$A\Longrightarrow B$ の証明

$$g(x)=\sin x-\sin^2 x$$

とする．

$$g'(x)=\cos x-2\sin x\cos x$$
$$g''(x)=-\sin x-2(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

であるから，(2) より

$$f(x)=g(x)+g''(x)$$
$$=(\sin x-\sin^2 x)$$
$$-\sin x-2(\cos^2 x-\sin^2 x)$$
$$=\sin^2 x-2\cos^2 x$$

である．

また，③ より

$$(1-2\sin a)\cos a=0$$
$$\sin a=\frac{1}{2}\ \ \text{または}\ \ \cos a=0$$
$$a=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi\quad\cdots\cdots④$$
$$(\because\quad 0\leqq a\leqq\pi)$$

である．さらに，① より

$$g(a)=0$$

すなわち

$$(1-\sin a)\sin a=0$$

であるから，④ と合わせて

$$a=\frac{\pi}{2}$$

である．

・$B \Longrightarrow A$ の証明

$$f(x)=\sin^2 x-2\cos^2 x$$

とし，$a=\frac{\pi}{2}$ とする．すると，① より

$$g(x)=(\sin x)\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\cos t\,dt-(\cos x)\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\sin t\,dt \quad \cdots\cdots ⑤$$

である．

ここで

$$\begin{aligned} f(t)&=\sin^2 t-2\cos^2 t\\ &=\sin^2 t-2(1-\sin^2 t)\\ &=3\sin^2 t-2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\cos t\,dt&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(3\sin^2 t-2)\cos t\,dt\\ &=\Big[\ \sin^3 t-2\sin t\ \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{x}\\ &=\sin^3 x-2\sin x+1 \end{aligned}$$

である．また

$$\begin{aligned} f(t)&=\sin^2 t-2\cos^2 t\\ &=(1-\cos^2 t)-2\cos^2 t\\ &=1-3\cos^2 t \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\sin t\,dt&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(1-3\cos^2 t)\sin t\,dt\\ &=\Big[\ -\cos t+\cos^3 t\ \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{x}\\ &=-\cos x+\cos^3 x \end{aligned}$$

である．これらと ⑤ より

$$\begin{aligned} g(x)&=(\sin^3 x-2\sin x+1)\sin x\\ &\quad-(-\cos x+\cos^3 x)\cos x\\ &=\sin^4 x-2\sin^2 x+\sin x\\ &\quad+\cos^2 x-\cos^4 x\\ &=\sin^4 x-2\sin^2 x+\sin x\\ &\quad+(1-\sin^2 x)-(1-\sin^2 x)^2\\ &=\sin^4 x-2\sin^2 x+\sin x\\ &\quad+\sin^2 x-\sin^4 x\\ &=\sin x-\sin^2 x \end{aligned}$$

である．

以上より，条件 A は条件 B であるための必要十分条件であることが示された．

＜解答終＞

【解説】

数Ⅲの積分法の問題です．「定積分で表された関数」という頻出のテーマですが，意外と苦戦する人も少なくありません．正しい解法・計算方法を身に付けてください．(3) では論証力と積分の計算力が求められます．

以下，設問ごとに補足を述べます．

(1) まず問題文の冒頭にある「連続」という条件は，$f(x)$ が積分可能であるための条件です．(1) は「$g(x)$ を微分し，$x=a$ を代入せよ」という問題です．「$g(a)\,(=0)$ を微分せよ（結果はもちろん 0)」という問題ではありませんので注意してください．

定積分で表された関数の微分にあたっては，次の公式が重要です．

＜公式＞

連続関数 $f(x)$ と定数 a に対して

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

である．

※ $\frac{d}{dx}$ は「x で微分する」という記号です．

この公式を使用する際に重要なのが，$\int$ の中の変数を t のみにすることです．例えば

$$\frac{d}{dx}\int_a^x t\,dt=x$$

ですが

$$\frac{d}{dx}\int_a^x xt\,dt=x^2$$

ではありません．実際，積分を計算すると

$$\int_a^x xt\,dt = \left[\frac{1}{2}xt^2\right]_a^x = \frac{1}{2}(x^3 - a^2x)$$

ですので

$$\frac{d}{dx}\int_a^x xt\,dt = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$$

となります．直接微分したければ

$$\int_a^x xt\,dt = x\int_a^x t\,dt$$

と x を $\int$ の外に出し，積の微分法を用いることで

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x\int_a^x t\,dt\right) &= \int_a^x t\,dt + x^2\\ &= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_a^x + x^2\\ &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

と計算することになります．

本問もこの要領で，「x を $\int$ の外に出す」＋「積の微分法」で計算していきます．

まずは $g(x)$ の積分の中にある x に着目し，これを外に出すにはどうすればよいかを考えます．そのために加法定理で

$$\sin(x-t) = \sin x\cos t - \cos x\sin t$$

と開き，解答中の ① の形に変形します．次に微分です．積の微分法になることに注意して計算していきましょう．例えば

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left\{(\sin x)\int_a^x f(t)\cos t\,dt\right\}\\ &= (\cos x)\int_a^x f(t)\cos t\,dt + (\sin x)\cdot f(x)\cos x\end{aligned}$$

といった要領です．これにより，② が得られますので，あとは $x = a$ を代入することで $g'(a) = 0$ が分かります．

$$\int_a^a f(t)\cos t\,dt = 0,\quad \int_a^a f(t)\sin t\,dt = 0$$

ですね．

(2)　(1) と同じ要領で $g''(x)$ を計算します．くどいですが積の微分法であることに注意です．

$$\begin{aligned}g''(x) = &\underline{(-\sin x)\int_a^x f(t)\cos t\,dt}\\ &+ f(x)\cos^2 x\\ &\underline{+(\cos x)\int_a^x f(t)\sin t\,dt}\\ &+ f(x)\sin^2 x\end{aligned}$$

となり，下線部分は ① と見比べることで $-g(x)$ になることが分かります．これは

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sin x) = -\sin x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\cos x) = -\cos x$$

のように，2 回微分すると符号が逆になることが効いています．下線部以外は

$$f(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = f(x)$$

となるので

$$g''(x) = -g(x) + f(x)$$

となります．

(3)　解答のように条件 A，B を定めます．「A が B であるための必要十分条件であることを示せ」という問題ですので，$A \Longrightarrow B$ と $B \Longrightarrow A$ の両方を示します．証明では，どちらが仮定でどちらが結論かを，採点者に伝わるように書きましょう．この手の問題では，片方が簡単で，もう片方が難しい，という場合がありますが，本問はどちらも極端に易しいことはなく，しっかり考えなくてはいけません．

まずは，$A \Longrightarrow B$ の証明からいきます．A を仮定しますので，$g(x) = \sin x - \sin^2 x$ です．これを用いて，$f(x)$ と a の値を決定します．$f(x)$ については，(2) があるので

$$f(x) = g(x) + g''(x)$$

です．この右辺を計算することで，簡単に求めることができます．「誘導に乗る」という視点でこれは取りたいです．

少し頭を使うのは，a の値を決定する部分です．(1) を用いると ④ のように a の値を 3 つまで絞ることができますが，ここで止まってしまう人もいるかもしれません．実は，① で $x = a$ とすることで，$g(a) = 0$ が成り立ちます．この条件を加えることで，$a = \frac{\pi}{2}$ と決まります．

この辺り，解答を見て「気付くわけがない」と思う人がいるかもしれませんが，次の理論がしっかり分かっていれば，$g(a)=0$ に目がいくのは自然になります．

＜公式＞

微分可能な関数 $F(x)$，$G(x)$ に対して

$$\begin{aligned}&F(x)=G(x)\\ \Longleftrightarrow\quad &「F'(x)=G'(x)\quad かつ\\ &\qquad F(a)=G(a)」\end{aligned}$$

（ただし，a は $F(x)$，$G(x)$ の定義域内のある値）．

$\Longrightarrow$ は明らかなので，$\Longleftarrow$ を確認しましょう．

$F'(x)=G'(x)$ であれば，積分することで

$$F(x)=G(x)+C\quad (C\text{ は定数})$$

となります．さらに，$F(a)=G(a)$ の条件から

$$F(a)=G(a)+C$$
$$\therefore\ C=0$$

となるので

$$F(x)=G(x)$$

が成り立ちます．

このように，「1 点代入した値が等しい」ならば，元の式と微分した式が同値です．したがって，本問では

$$\begin{aligned}①\ &\Longleftrightarrow「②\ かつ\ g(a)=0」\\ &\Longleftrightarrow「g''(x)=-g(x)+f(x)\\ &\qquad かつ\ g(a)=0\ かつ\ g'(a)=0」\end{aligned}$$

となり，$g(a)$，$g'(a)$ の値を見ることで ① と (2) の結論は同値になります．$g(x)$ の段階でも 1 点を代入しておかなければならず，この同値の意識が大事です．

次に，$B\Longrightarrow A$ の証明です．B を仮定するので $f(x)=\sin^2 x-2\cos^2 x$ かつ $a=\dfrac{\pi}{2}$ です．この条件から $g(x)$ を求めていきます．積分を実際に計算しましょう．

$g(x)$ の定義から

$$g(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\sin(x-t)\,dt$$

となり，① のように変形することで，⑤ を得ます．あとは

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\cos t\,dt\ ,\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\sin t\,dt$$

の計算です．ここは工夫しましょう．

$f(x)=\sin^2 x-2\cos^2 x$ をそのまま代入すると

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\cos t\,dt\\ &\qquad=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(\sin^2 t-2\cos^2 t)\cos t\,dt\end{aligned}$$

となり，$\cos^3 t$ の積分が出てきます．これを

$$\begin{aligned}\sin^2 t-2\cos^2 t&=\sin^2 t-2(1-\sin^2 t)\\ &=3\sin^2 t-2\end{aligned}$$

と変形して代入すると

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\cos t\,dt\\ &=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(3\sin^2 t-2)\cos t\,dt\\ &=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(3\sin^2 t\cos t-2\cos t)\,dt\\ &=\Big[\ \sin^3 t-2\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{x}\end{aligned}$$

と楽に計算できます．自然数 n に対して

$$\int \sin^n t\cos t\,dt=\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}t+C$$
$$\int \cos^n t\sin t\,dt=-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}t+C$$
$$(C\text{ は積分定数})$$

は神戸大では頻出の積分ですので，しっかりおさえてください．

同様に

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\sin t\,dt$$

であれば

$$\begin{aligned}\sin^2 t-2\cos^2 t&=1-\cos^2 t-2\cos^2 t\\ &=1-3\cos^2 t\end{aligned}$$

として

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\sin t\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(1-3\cos^2 t)\sin t\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(\sin t-3\cos^2 t\sin t)\,dt$$
$$=\left[-\cos t+\cos^3 t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

と計算しましょう．これらを正しく計算することで，$g(x)$ が求まり，条件 A が示せます．

$f(x)$ が $\sin^2 x$ と $\cos^2 x$ の混在した形で与えられているのは，積分計算の際に sin と cos のどちらに揃えるのか試されているのかもしれません．柔軟に対応してください．

それでは，最後に基本の確認問題をつけておきますので，必要に応じて使ってください．

check!

［1］ 等式

$$\int_a^x f(t)\,dt=\sin x-\frac{1}{2}$$

を満たす連続関数 $f(x)$ と定数 a の値をそれぞれ求めよ．ただし，$0\leqq a\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする．

［2］ 連続関数 $f(x)$ が

$$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=f(x)$$

を満たすとき，$f''(x)=f(x)$ が成り立つことを示せ．また，$f(0)$ と $f'(0)$ の値をそれぞれ求めよ．

［3］ 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt$

【解答】

［1］ $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=\sin x-\frac{1}{2}$ ……①

において，$x=a$ として

$$0=\sin a-\frac{1}{2}$$
$$\sin a=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ a=\frac{\pi}{6}\quad\left(\because\quad 0\leqq a\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

である．

また，① の両辺を x で微分して

$$f(x)=\cos x$$

である（これは $f(x)$ が連続という条件を満たす）．

［2］ $\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=f(x)$

より

$$x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=f(x)\qquad\cdots\cdots①$$

である．この両辺を x で微分して

$$\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=f'(x)$$
$$f'(x)=\int_0^x f(t)\,dt\quad\cdots\cdots②$$

であり，さらに，両辺を x で微分して

$$f''(x)=f(x)$$

である．

また，①，② で $x=0$ とすることで

$$f(0)=f'(0)=0$$

である．

［3］ (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$=1$

である．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$
$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$\displaystyle=\frac{\pi}{4}$

である．

(3)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\sin t\,dt$$
$$= \left[-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 1 - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{2}{3}$$

である.

【神大理系数学ゼミから】

今年度，研伸館西宮校において，神戸大学志望者を対象に，実際に神戸大の問題を解いてもらうテストゼミを実施しています.

この問題を添削していて目についた点を紹介します．この大問は点数差が大きく出ました．(1)，(2) の類題を経験している人にとっては，「典型」なので取りやすかったようです.

(1) インテグラルの外に x を出してから微分するのがポイントですが，そのまま微分しようとする答案が目立ちました．公式をどの形なら使えてどの形なら使えないのかを整理しましょう．問題文の読み間違い（$g'(a)$ でなく $g(a)$ を求めるなど）も目立ちました.

(2) (1) の微分の計算ができている人は，この小問は取れていました．2 回微分することで $f(x)$ の形が出てくることには気付けるようです.

(3) 必要十分を示すのに，2 方向の証明が必要なことはどの答案も理解できていました．$B \Longrightarrow A$ の証明は積分計算なので，(1) ができなくても挑むことができます．これに気付いて (1) を諦めて (3) を解いている答案もありました．部分点を狙う姿勢は大事だと思います．解説中にも述べた $g(a) = 0$ に意識が向くかどうかで完答できるか差がつきました．計算量も多いので，時間内に解ききるためには微分・積分の計算スピードも要求されます．「時間が足りない」という感想も複数ありました.

受講者の感想も紹介しておきます.

- 解説を聞いたら (1)，(2) は解けそうな問題だったので，冷静に手順を考えながら解けるようにしたい．（システム情報学部志望）
- 時間が足りなかった．積分と微分のスピードをもっと速くする．（農学部志望）
- 最後の計算に時間がかかったけど，それ以外は迷わず進められたので嬉しいです．（医学部志望）

それでは今回はここまでにしたいと思います．また次回をお楽しみに.

（数学科　川﨑）