現役合格への軌跡（きせき）

今回は 2026 年度の大阪大学の文系の第 3 問を解説したいと思います．

文系　第３問

a を正の実数とする．関数

$$f(x)=4ax^3+\frac{1-a}{a}-6\int_{x-1}^{x}(t^2+t)dt$$

の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値が正となるような a の値の範囲を求めよ．

※なお本原稿における解答や解説は，大阪大学が公表したものではなく，研伸館が独自で作成したものです．

【解答】

$$\begin{aligned}&\int_{x-1}^{x}(t^2+t)dt\\&=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_{x-1}^{x}\\&=\frac{x^3-(x-1)^3}{3}+\frac{x^2-(x-1)^2}{2}\\&=\frac{3x^2-3x+1}{3}+\frac{2x-1}{2}\\&=x^2-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}f(x)&=4ax^3+\frac{1-a}{a}-6\left(x^2-\frac{1}{6}\right)\\&=4ax^3-6x^2+\frac{1}{a}\end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned}f'(x)&=12ax^2-12x\\&=12ax\left(x-\frac{1}{a}\right)\end{aligned}$$

であり，$a>0$ より $f(x)$ の $x \geqq 0$ における増減表は以下の通りである．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を $m(a)$ とおく．

(i)　$0<\frac{1}{a} \leqq 1$，つまり，$a \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}m(a)&=f\left(\frac{1}{a}\right)\\&=\frac{4}{a^2}-\frac{6}{a^2}+\frac{1}{a}\\&=\frac{-2+a}{a^2}\end{aligned}$$

であるから

$$m(a)>0$$

$$-2+a>0 \quad (\because\ a^2>0)$$

$$\therefore\ a>2$$

である．これは $a \geqq 1$ を満たす．

(ii)　$\frac{1}{a}>1$，つまり，$0<a<1$ のとき

$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ において単調減少だから

$$m(a)=f(1)=4a-6+\frac{1}{a}$$

であるから

$$m(a)>0$$

$$4a^2-6a+1>0 \quad (\because\ a>0)$$

$$\therefore\ a<\frac{3-\sqrt{5}}{4},\ \frac{3+\sqrt{5}}{4}<a$$

である．$2<\sqrt{5}<3$ より

$$0<\frac{3-\sqrt{5}}{4}<1<\frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

に注意して，$0<a<1$ と合わせると

$$0<a<\frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

である．

以上より，求める a の値の範囲は

$$0<a<\frac{3-\sqrt{5}}{4},\ 2<a$$

である．

【解説】

関数の最小値に関する問題です．$f(x)$ の式中に積分が入っていますが，具体的に計算することができ，$f(x)$ はただの 3 次関数です．

関数の最小値を求めるにあたって，「微分して増減表を書く」は定石です．$f'(x)$ を求めると $f'(x)=0$ となる x が $x=0$，$\frac{1}{a}$ と分かります．

ここで，$a>0$ より $0<\dfrac{1}{a}$ なので，解答中の増減表のようになることが分かります．a がすべての実数であれば，$a<0$，$a=0$，$a>0$ で場合分けしなければならなかったですが，親切な設定ですね．

増減表から $x=\dfrac{1}{a}$ が $0 \leqq x \leqq 1$ に入るかどうかで，定義域内における増減の様子が変わります．a の値で場合分けしてそれぞれの最小値を求め，それぞれの場合の $m(a)>0$ を解けば完了です．場合分けの a の範囲との共通範囲をとることを忘れないようにしましょう．

標準的な処理の組み合わせなので，計算ミスなくしっかりと完答できるかが重要な問題でしょう．

今回はここまでです．お疲れ様でした．

（数学科　桒野）