強者の戦略

今回は 2026 年度の岡山大学の理系の第 3 問を解説します.

理系第３問

i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ.

(1) α, β を実数とする.

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

を示せ.

(2) θ を実数とする．正の整数 n に対して

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$
$$= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

を示せ.

(3) 以下の条件 (a), (b) をともに満たす複素数 z をすべて求めよ.

(a) z の虚部は正で $|z| = 1$ である.

(b) $z^5 + z$ は実数である.

（単元：複素数平面（数 C），配点：50 点）

【解答】

(1) 左辺を展開し，加法定理を用いると

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$\quad + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$
$$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

となり，示せた.

(2) 数学的帰納法で示す.

(i) $n = 1$ のとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta$$

であるから成り立つ.

(ii) $n = k$ (k は正の整数) のとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$$

が成り立つと仮定する．このとき (1) より

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1}$$
$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta))(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= \cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta)$$

となり，$n = k+1$ のときも成り立つ.

(i), (ii) より，すべての正の整数 n について題意は示せた.

(3) $|z| = 1$ かつ虚部が正であるから，$0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ を用いて

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

と表せる．(2) より

$$z^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$$

であるから

$$z^5 + z = (\cos 5\theta + \cos\theta)$$
$$\quad + i(\sin 5\theta + \sin\theta)$$

となる．これが実数となる条件は

$$\sin 5\theta + \sin\theta = 0$$

である．和→積の公式を用いると

$$2\sin 3\theta\cos 2\theta = 0$$

より，$\sin 3\theta = 0$ または $\cos 2\theta = 0$ である.

$0 < \theta < \pi$ より $0 < 3\theta < 3\pi$ であるから，$\sin 3\theta = 0$ となるのは

$$3\theta = \pi,\ 2\pi$$

すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}$ のときである.

$0 < \theta < \pi$ より $0 < 2\theta < 2\pi$ であるから，$\cos 2\theta = 0$ となるのは

$$2\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$$

すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}$ のときである.

以上より，求める z は

$$z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$
$$z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2},$$
$$z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},$$
$$z = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

である.

【(3) の別解】

$|z|=1$ より $z\overline{z}=1$ であるから

$$\overline{z}=\frac{1}{z}$$

である．

複素数 w が実数となる条件は $w=\overline{w}$ であるから，z^5+z が実数となる条件は

$$z^5+z=\overline{z^5+z}$$

$$z^5+z=\left(\overline{z}\right)^5+\overline{z}$$

$$z^5+z=\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z}$$

である．両辺に z^5 をかけて整理すると

$$z^{10}+z^6=1+z^4$$

$$z^4(z^6-1)+(z^6-1)=0$$

$$(z^6-1)(z^4+1)=0$$

となる．よって

$$z^6=1 \quad \text{または} \quad z^4=-1$$

である．

$|z|=1$ かつ虚部が正であるから，$0<\theta<\pi$ を満たす実数 θ を用いて

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

と表せる．(2) より

$$z^6=\cos 6\theta+i\sin 6\theta$$

$$z^4=\cos 4\theta+i\sin 4\theta$$

である．

(i) $z^6=1$ のとき

$\cos 6\theta=1$ かつ $\sin 6\theta=0$ である．$0<\theta<\pi$ より $0<6\theta<6\pi$ であるから

$$6\theta=2\pi,\ 4\pi$$

すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}$ となる．

(ii) $z^4=-1$ のとき

$\cos 4\theta=-1$ かつ $\sin 4\theta=0$ である．$0<\theta<\pi$ より $0<4\theta<4\pi$ であるから

$$4\theta=\pi,\ 3\pi$$

すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}$ となる．

(i)，(ii) より，求める z は

$$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2},$$

$$z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},$$

$$z=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

である．

強者の戦略

【解説】

・(1)，(2) について

(1) は極形式の積の公式の証明です．加法定理を用いることで示せます．

(2) の等式は本来すべての整数 n で成立（後述のド・モアブルの定理）しますが，今回は正の整数 n に限って成立を示すことになります．正の整数 n に対しての証明ということで数学的帰納法の使用は思いつきたいところです．

> ド・モアブルの定理
> 整数 n と実数 θ に対して
> $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

(1) は (2) の帰納法で，(2) は (3) で用いる，という誘導になっています．小問が誘導の役割を果たしている問題ですので，(3) で何をどう使うかを意識しながら処理しましょう．

・(3) について

$|z| = 1$ という条件がある場合

・$z = \cos\theta + i\sin\theta$

・$\overline{z} = \dfrac{1}{z}$

を用いるのは定石となります．前者の極形式を用いたのが【解答】で，虚部が正という条件と合わせて，z を極形式

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

とおいています．こうすることで，(2) の結果から z^5 も簡単に書け，三角関数の方程式に帰着できます．

「実数である」という条件は「虚部が 0」と読み替えるのが基本ですね．得られた $\sin 5\theta + \sin\theta = 0$ は，左辺をそのまま処理しようとすると煩雑になりますが，和→積の公式を用いて積の形にすると $\sin 3\theta\cos 2\theta = 0$ となり，「$\sin 3\theta = 0$ または $\cos 2\theta = 0$」と単純な方程式に帰着できます．

> 和→積の公式
> $$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

θ の範囲 $0 < \theta < \pi$ から，3θ，2θ それぞれの動く範囲を正しく押さえることに注意しましょう．特に，$\sin 3\theta = 0$ の解のうち $3\theta = 0$，3π すなわち $\theta = 0$，π は範囲外なので，答えに含めないように注意しましょう．

・【別解】のアプローチについて

別解では「w が実数」を「$w = \overline{w}$」と読み替え，さらに $|z| = 1$ から $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ を用いることで，z 自身についての方程式を立てています．

別解では z の方程式 $(z^6 - 1)(z^4 + 1) = 0$ が得られ，$z^6 = 1$ または $z^4 = -1$ となります．これらは (2) を使うことで θ の方程式へと帰着できます．

両方針を比較すると

本解：実部・虚部に分けて θ の方程式を直接立てる

別解：$\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ を用いて z の方程式を立て，最後に θ へ

となり，どちらも自然なアプローチです．問題によって相性のよい方を選べると引き出しが増えますね．

本問のポイントは

1. (2) で証明した等式を，(3) で利用することを意識すること
2. $|z| = 1$ かつ虚部が正の条件から，z を極形式 $\cos\theta + i\sin\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ で表すこと
3. 「実数である」という条件を「虚部が 0」と読み替え，和→積の公式を用いて単純な方程式に帰着させること

の 3 点でした．誘導の意図を汲み取り，極形式の話に持ち込みたい問題です．

今回は以上となります．お疲れ様でした．

数学科　松浦