強者の戦略

研伸館 物理科の米田 誠です。強者の戦略 HP の物理のページ、第１回目・第２回目を担当させて頂きます。強者を目指す皆さんへ，私から最初の課題は『東京大学　後期日程　総合科目Ⅱ』からの出題とさせて頂きます。この問題はいわゆる「浮体静力学」からの出題となっています．この「浮体静力学」とは船舶や海上構造物が海上において十分にその機能を果たすために静止水面上にて釣り合いを保つ為の条件や，そのような釣り合い状態にある浮体の安定性を検討する為の学問です．設問自体に非常に丁寧な誘導がありますので文章さえ読めれば問題なく完答できるはずです．では，頑張って下さい．

【問題】浮体静力学『出典：東京大学　後期日程　総合科目Ⅱ（改題)』(考察時間目安：５０分)

図１のように均質な直方体の物体が，面 ABCD が水平な状態で水に浮いて静止している．水の密度を ρ_0 とし，物体の密度を $a\rho_0$（$0 < a < 1$）とする．図の灰色の部分は直方体の水面下にある部分の側面を示す。直方体の辺 AD の長さは l，辺 AB と辺 AA′ の長さは等しく b である。重力加速度を g とする．$l > b$ であるとする．点 H と I はそれぞれ，辺 AD と B′C′ の中点であり，点 P は四角形 ABCD の対角線の交点である．

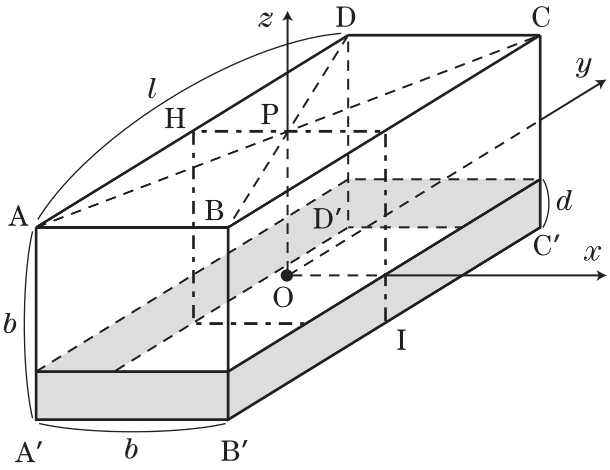

図　1

図１の状態の時，物体に作用している力は重力と浮力であり，この２つの力はつり合い状態にある．重力の作用点は物体全体の直方体の中心であり，その点を G とする．ただし，直方体の中心とは直方体の互いに向かう面の中心を結ぶ線分の中点である．物体に作用する浮力の大きさは，物体が押しのけた体積の水に作用する重力に等しく，その向きは鉛直上向きである．浮力の作用点は物体の水面下の部分からなる直方体の中心であり，その点を Q とする。

以下の議論では図１に示す座標系 O−xyz を用いる．原点は水面上に取り，x 軸，y 軸，z 軸は，それぞれ図１のように水平な状態で水に浮いている直方体の辺 AB，AD，A′A と平行にとる．また，z 軸はその状態での点 P を通るようにとる．

〔A〕

(1)　物体が図1の状態にあるときの物体の水面下の部分の深さ(以後, 喫水という) d を a と b を用いて表せ.

次に，面 ABCD を水面と平行な状態に保ったまま，直方体を z 軸に平行な方向に移動させる場合を考える．

(2)　P 点に鉛直下向きに力をゆっくり加えると，物体は (1) における状態から少し沈んで釣り合い状態をとる. 加える力の大きさが F であるとき, 釣り合い状態における直方体の中心 G の z 座標の値 z_0 を求めよ.

〔B〕

以下の問題では，直方体が y 軸の周りに回転して傾斜する場合を考える．（中略）図 2 は直方体が右に傾斜した状態の平面 $y=0$ における形状を示したものである．このとき，加えた力によるモーメントと傾斜角 β の間の関係を求めたい．直方体が傾斜すると，水面下の部分の形状が変化するため，浮力の作用点が点 Q から点 Q′ に移動する．このとき，点 G を中心として直方体を回転させようとするモーメントは釣り合っており，点 H 及び点 I に加えられた力によるモーメントの和と，点 Q′ に作用する浮力によるモーメントは符号が逆で大きさが等しい．

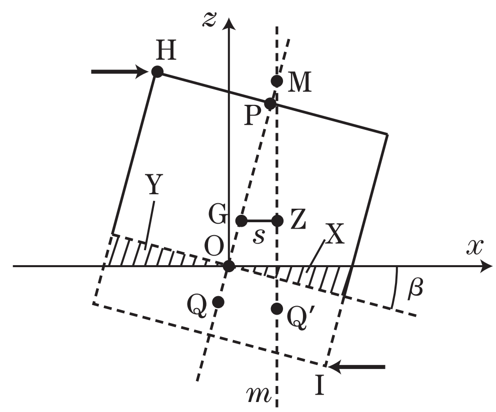

図　2

浮力の作用点は $y=0$ での物体の断面の水面下の部分の重心 Q′ となる．この部分を台形 T と呼ぶ．

一般に，平面図形 U を複数の部分図形 U_1，U_2，…，U_n に分割するとき，もとの平面図形 U の重心の位置ベクトル $\vec{r}$ と，各部分図形 U_1，U_2，…，U_n の重心の位置ベクトル $\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，…，$\vec{r}_n$ の間には以下の関係がある．

$$\vec{r}=\frac{S_1\vec{r_1}+S_2\vec{r_2}+\cdots+S_n\vec{r_n}}{S_1+S_2+\cdots+S_n}\quad\cdots①$$

ここで，S_1，S_2，…，S_n は各部分図形の面積である．

直方体が図 1 の状態にあったときの水面下の部分は図 2 において太い破線で示す長方形であり，浮力の作用点は長方形の重心である点 Q であった．台形 T はこの長方形から斜線部 Y で示す三角形を取り除き，斜線部 X で示す三角形を加えたものであることに着目して Q′ の位置を求めよう．

(3)　まず，斜線部 X 及び Y で示される三角形の面積をそれぞれ b と β を用いて表せ．

(4)　斜線部 X 及び Y で示される三角形の重心の x 座標をそれぞれ b と β を用いて表せ．

(5)　①式の関係を利用して Q′ の x 座標を a，b，β を用いて表せ．

点 Q′ を通り z 軸に平行な直線を m とし，この直線に物体の重心である点 G から下ろした垂線の足を点 Z とする．点 Z と点 G の x 座標をそれぞれ x_{Z} および x_{G} として，

$$s=x_{\mathrm{Z}}-x_{\mathrm{G}}\quad\cdots②$$

と定義する．

(6)　s を a，b，β を用いて表せ．

(7)　s を用いて，直方体を点 G を中心として反時計回りに回転させようとする浮力によるモーメント M を表せ．

［設問 1］　物体の水面下の部分の体積を V，X の体積を ΔV，X と Y の重心間の距離を h としたとき，

$$s=\frac{h\cdot\Delta V}{V}-\mathrm{QG}\sin\beta \quad \cdots③$$

の関係が成り立つことを (3) ～ (6) の計算結果を用いて確認せよ。

［設問 2］　幅 B，喫水 d の浮体について，図 3 のように浮体の底面が水面上に現れたときの GZ の長さ s' はいくらになるか．③式を用いて考えよ。ただし，解答には QGsinϕ を用いてよいものとする．

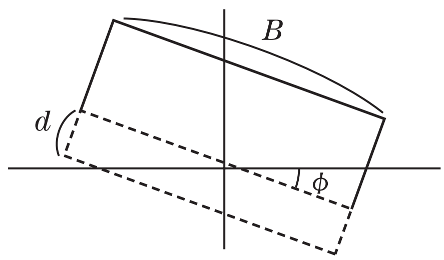

図　3

【topics】

③式は Atwood の式と呼ばれ，浮体の動復元挺　$E=\int_0^{\phi}s(\phi)d\phi$　（*Dynamical Stability lever*：浮体の横傾斜に関する力学的性質を表す指標）を求める際に用いられる．ここで，図 2 における GM はメタセンター高さと呼ばれ，浮体の釣り合い状態に関する安定性を表す指標となっている．このメタセンター高さ GM は　$\dfrac{ds(\phi)}{d\phi}$　を用いて求めることができる．メタセンター高さが大きいほど浮体はより安定な釣り合い状態となり，GM＝0 のときは中立，GM＜0 のときは不安定な釣り合い状態をとる。