強者の戦略

研伸館 物理科の米田 誠です．強者の戦略HPの物理のページ，第２回目は第１回目で紹介した『東京大学 後期日程 総合科目Ⅱ』からの出題，「浮体静力学」の問題についての解答解説＋αとしたいと思います．

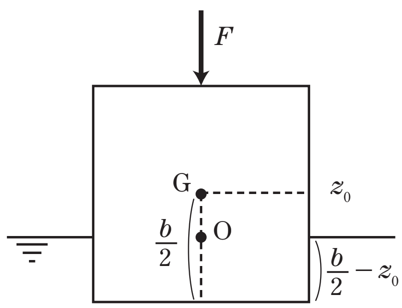
【解答解説】

〔A〕

(1) 物体全体に働く重力 $b^2la\rho_0g$ と，物体に働く浮力 $dbl\rho_0g$ が釣り合うので，

$$b^2la\rho_0g = dbl\rho_0g \qquad \therefore \quad d = ab$$

(2)



図の様に物体の水面下の部分の深さは $\dfrac{b}{2}-z_0$ である．

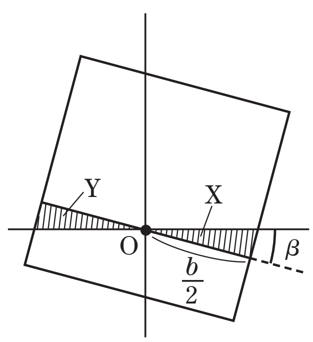
従って，外力 F がはたらいた時の力の釣り合い式は，

$$b^2la\rho_0g + F = \left(\frac{b}{2}-z_0\right)bl\rho_0g$$

$$\rightarrow \quad ba + \frac{F}{bl\rho_0g} = \frac{b}{2}-z_0$$

$$\therefore \quad z_0 = \frac{b}{2} - ab - \frac{F}{bl\rho_0g}$$

(3)



（三角形 X の面積）＝（三角形 Y の面積）$= \dfrac{b^2}{8}\tan\beta$

(4) 三角形 X の 3 頂点の座標は，

$$(0,\ 0),\ \left(\frac{b}{2\cos\beta}, 0\right),\ \left(\frac{b}{2}\cos\beta, -\frac{b}{2}\sin\beta\right)$$

であるから，

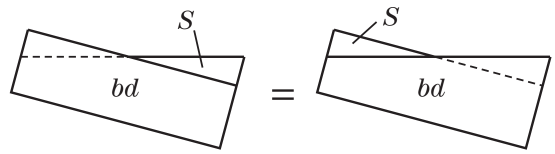
（X の重心の x 座標）

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2\cos\beta} + \frac{b}{2}\cos\beta\right) = \frac{b}{6}\left(\frac{1}{\cos\beta} + \cos\beta\right)$$

また，対称性から

（Y の重心の x 座標）$= -\dfrac{b}{6}\left(\dfrac{1}{\cos\beta} + \cos\beta\right)$

(5)



X，Y の面積を S，重心を G_X，G_Y とすると，

$$\frac{bd\,\overrightarrow{OQ} + S\,\overrightarrow{OG_X}}{bd+S} = \frac{bd\,\overrightarrow{OQ'} + S\,\overrightarrow{OG_Y}}{bd+S}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OQ'} = \frac{bd\,\overrightarrow{OQ} + S\,\overrightarrow{OG_X} - S\,\overrightarrow{OG_Y}}{bd}$$

$$= \overrightarrow{OQ} + \frac{S}{bd}\left(\overrightarrow{OG_X} - \overrightarrow{OG_Y}\right)$$

が成立する．

ここで，Q，Q′ の x 座標をそれぞれ x_Q，$x_{Q'}$ とすると

$$x_Q = \frac{d}{2}\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{d}{2}\sin\beta = -\frac{ab}{2}\sin\beta$$

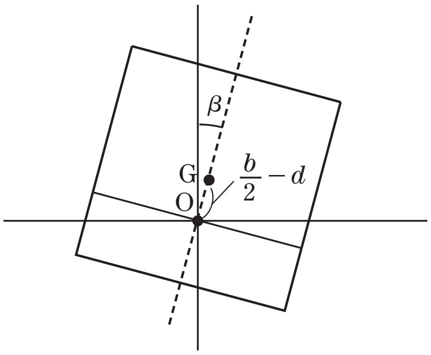
$$\frac{S}{bd} = \frac{b^2}{8}\tan\beta \cdot \frac{1}{b\cdot ab} = \frac{1}{8a}\tan\beta$$

$$\therefore \quad x_{Q'} = x_Q + \frac{S}{bd}\cdot\frac{b}{6}\left(\frac{1}{\cos\beta} + \cos\beta\right)\times 2$$

$$= -\frac{ab}{2}\sin\beta + \frac{1}{8a}\tan\beta \cdot \frac{b}{3}\left(\frac{1}{\cos\beta} + \cos\beta\right)$$

$$= \frac{b\sin\beta}{24a}(-12a^2 + 2 + \tan^2\beta)$$

(6)



$$s = x_{\mathrm{Z}} - x_{\mathrm{G}} = x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{G}}$$

$$x_{\mathrm{G}} = \left(\frac{b}{2}-d\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \left(\frac{b}{2}-ab\right)\sin\beta$$

以上２式から，

$$s = \frac{b\sin\beta}{24a}(-12a^2+2+\tan^2\beta) - \left(\frac{b}{2}-ab\right)\sin\beta$$

$$\rightarrow \quad s = \frac{b\sin\beta}{24a}\left\{-12a^2+2+\tan^2\beta-24a\left(\frac{1}{2}-a\right)\right\}$$

$$\therefore \quad s = \frac{b\sin\beta}{24a}(12a^2-12a+2+\tan^2\beta)$$

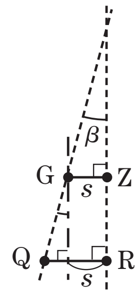
(7) 図から浮力 $\rho_0 galb^2$ によるモーメントは

$$M = s\rho_0 galb^2$$

で求まる。

ここで，浮力 $\rho_0 galb^2$ は物体に働く重力と同じ値，つまり一定値となるため，物体をもとの状態に戻そうとするモーメントは s に依存する事が分かる。

【設問 1】（代入計算だけなので証明略）



左図から

$$s = \mathrm{QR} - \mathrm{QG}\sin\beta$$

であることがわかる。また，

$$s = \frac{h\cdot\Delta V}{V} - \mathrm{QG}\sin\beta$$

なので，2 式を比較して，

$$\mathrm{QR} = \frac{h\cdot\Delta V}{V}$$

が示される。

<考察>

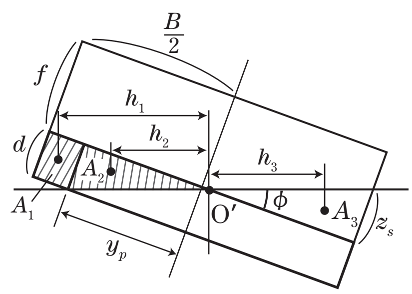
OR を求める式について，

$$\mathrm{QR} = \frac{h\cdot\Delta V}{V} = \frac{\frac{1}{2}h\cdot\Delta V + \frac{1}{2}h\cdot\Delta V}{V}$$

と書き換えると，より具体的な式のイメージが出来る．

分子の $\frac{1}{2}h\cdot\Delta V$ は X(Y) 部に働く重力（浮力）の点 O まわりの力のモーメントを計算している事がわかる。これを用いて設問 2 を解く．

【設問 2】



上図の様に点 O′，長さ z_s，f，y_p を設定する．また水中から水面上に出た部分の面積を A_1，A_2 とし，水没した部分の面積を A_3 とする．加えて各部分の重心の位置から点 O′ までの水平距離をそれぞれ h_1, h_2, h_3 とする．いま，没水部の体積は変化しない事を用いて，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{B}{2}+y_p\right)^2\tan\phi = Bd$$

$$\left(\frac{B}{2}+y_p\right)\tan\phi = d + z_s$$

2 式から

$$y_p = \sqrt{\frac{2Bd}{\tan\phi}} - \frac{B}{2}, \quad z_s = \sqrt{2Bd\tan\phi} - d$$

ここで，$A_1 \sim A_3$ の面積はそれぞれ

$$A_1 = d\left(\frac{B}{2} - y_p\right), \quad A_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{\tan\phi},$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{{z_s}^2}{\tan\phi}$$

また，$h_1 \sim h_3$ の長さはそれぞれ

$$h_1 = \left[\frac{d}{\tan\phi} + \frac{1}{2}\left(\frac{B}{2} - y_p\right)\right]\cos\phi + \frac{d}{2}\sin\phi$$

$$h_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{d}{\tan\phi}\right)\left(\cos\phi + \frac{1}{2}\tan\phi\sin\phi\right)$$

$$h_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{z_s}{\tan\phi}\right)\left(\cos\phi + \frac{1}{2}\tan\phi\sin\phi\right)$$

いま，浮心の水平移動距離 QR は

$$\mathrm{QR} = \frac{1}{Bd}(h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3)$$

これに $h_1 \sim h_3$ を代入して計算すると

$$s' = \frac{d}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2B\tan\phi}{d}} - 1\right)\sin\phi + \left(\frac{B}{d} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2B}{d\tan\phi}}\right)\cos\phi\right] - \mathrm{QG}\sin\phi$$

この s' の式で変数は ϕ のみであり，また，物体を元に戻そうとするモーメントは，(7) で示した様に s' に依存する。つまり，浮体の復元性能は傾斜角 ϕ に依存することが明らかとなる。

<考察>

ここで，s'（GZ）と ϕ の関係を示した曲線図を GZ 曲線図といい，船舶の安定性評価に用いられる。船舶を建造する時にもこの GZ 曲線を用いて評価を行い，基準を満たさなければ建造したとしても運行ができない。ちなみに GZ 曲線図にて $s' = 0$ となる ϕ を復原力消失角といい，傾斜角がこれを越えると，船舶は不安定な釣り合い状態になり転覆してしまう。

【おわりに】

今回はかなり工学色の強い問題を取り扱いましたので，特に工学部を志望しようという人には興味深かったのではないでしょうか．次回の担当は私ではないので，皆さんの挑戦を受けて立つのはずいぶんと先の事になるとは思いますが，必ずこの場所へ戻ってきますのでご期待下さい．最後になりましたが，強者の戦略 HP に感想など頂けると有難いです。

以　上