

強者の戦略

研伸館 物理科の米田 誠です。強者の戦略HPの物理のページ、第6回目は第5回目で紹介した『東京大学 後期日程 総合科目Ⅱ』からの出題、「 n 相交流」の問題についての解答解説+αとしたいと思います。

【解答解説】

1

キルヒホッフの法則から

$$v_k(t) - Ri_k(t) - L \frac{di_k(t)}{dt} = 0$$

2

消費電力の公式から

$$P_k(t) = v_k(t) \cdot i_k(t)$$

〔設問 1〕

積和の関係から、

$$\begin{aligned} & \sin(a + bj) \sin \frac{b}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(a + b \left(j - \frac{1}{2} \right) \right) - \cos \left(a + b \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k-1} \sin(a + bj) \sin \frac{b}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \cos \left(a + b \left(j - \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \cos \left(a + b \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) \Big\} \\ &= \frac{1}{2} \cos \left(a + b \left(0 - \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \cos \left(a + b \left(0 + \frac{1}{2} \right) \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \cos \left(a + b \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \cos \left(a + b \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \cos \left(a + b \left(2 - \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \cos \left(a + b \left(2 + \frac{1}{2} \right) \right) \\ & \quad \vdots \\ & \quad + \frac{1}{2} \cos \left(a + b \left(k-1 - \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \cos \left(a + b \left(k-1 + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(a - \frac{1}{2}b \right) - \frac{1}{2} \cos \left(a + b \left(k - \frac{1}{2} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

また、和積の関係を用いて整理すると

$$\sum_{j=0}^{k-1} \sin(a + bj) \sin \frac{b}{2} = \sin \left(a + \frac{k-1}{2}b \right) \sin \frac{kb}{2}$$

〔設問 2〕

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n i_k(t) &= \sum_{k=1}^n \sqrt{2}I \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right) \\ &= \sqrt{2}I \sum_{j=0}^{n-1} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n}j \right) \end{aligned}$$

これに①を用いると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n i_k(t) &= \sqrt{2}I \frac{1}{\sin \left(-\frac{\pi}{n} \right)} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{n}(n-1) \right) \sin(-\pi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

〔設問 3〕

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k=1}^n P_k(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t) \cdot i_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^n 2RI^2 \sin^2 \left(\omega t - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right) \\ & \quad + \sum_{k=1}^n 2\omega LI^2 \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right) \times \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n RI^2 \left\{ 1 - \cos \left(2\omega t - \frac{4\pi}{n}(k-1) \right) \right\} \\ & \quad + \sum_{k=1}^n \omega LI^2 \sin \left(2\omega t - \frac{4\pi}{n}(k-1) \right) \\ &= nRI^2 - RI^2 \sum_{k=1}^n \cos \left(2\omega t - \frac{4\pi}{n}(k-1) \right) \\ & \quad + \omega LI^2 \sum_{k=1}^n \sin \left(2\omega t - \frac{4\pi}{n}(k-1) \right) \quad \dots \quad (*) \end{aligned}$$

(i) $n \geq 3$ のとき

①, ②を用いて

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \cos \left(2\omega t - \frac{4\pi}{n}(k-1) \right) \\ &= \frac{1}{\sin \left(-\frac{2\pi}{n} \right)} \cos \left(2\omega t - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{4\pi}{n} \right) \sin(-2\pi) \\ &= 0 \\ & \sum_{k=1}^n \sin \left(2\omega t - \frac{4\pi}{n}(k-1) \right) \\ &= \frac{1}{\sin \left(-\frac{2\pi}{n} \right)} \sin \left(2\omega t - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{4\pi}{n} \right) \sin(-2\pi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ここで、(*) から

$$P(t) = nRI^2$$

強者の戦略

$$\therefore \langle P \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} nRI^2 dt = nRI^2$$

(ii) $n=2$ のとき

$$\begin{aligned} P(t) &= 2RI^2 - RI^2 \sum_{k=1}^2 \cos 2\omega t + \omega LI^2 \sum_{k=1}^2 \sin 2\omega t \\ &= 2RI^2 - 2RI^2 \cos 2\omega t + 2\omega LI^2 \sin 2\omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) dt \\ &= 2RI^2 - 2RI^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\omega t dt \\ &\quad + 2\omega LI^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\omega t dt \\ &= 2RI^2 \end{aligned}$$

以上から $n \geq 2$ において

$$\langle P \rangle = nRI^2$$

<考察>

現代社会は電力を消費しない生活が想像できないほど電力に依存した社会となっています。この電力は様々な発電所から交流発電され、一般的に三相交流の形で我々の家庭や工場に送電されます。ではなぜ三相交流が一般的に使われているのか、以下に示す三相交流の代表的なメリットについて考えてみましょう。

メリット 1：電力が時間的に変動しない

メリット 2：回転磁界を得やすい

メリット 3：送電効率が良い

〔メリット 1 について〕

単相交流電流では、時刻の変化に伴い電流の値が三角関数の形で変化するため、瞬時電力が変化してしまいます。このため、モーターなどに滑らかな回転を要求する際には複雑な整流装置などを用いて、瞬時電力が一定になるように調整する必要があります。一方、三相交流電流を用いると、設問 3 で解いたように、瞬時電力 $P(t)$ が一定値 $3RI^2$ で得られます。つまり、整流装置などを用いなくてもモーターを滑らかに回転させることができます。

〔メリット 2 について〕

単相電流を用いてモーターを回転させるときには、モーターの初期位置によって回転始動の補助（手で回

してやるなど）が必要になります。それに対して三相交流の場合は、送電されてきたそのままの電流がモーターに入るだけで回転磁界を作り、モーターは回転を始めます。（下図参照）

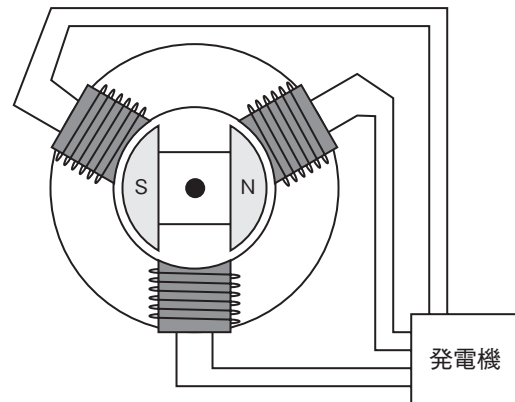


図 三相誘導モーターの原理

〔メリット 3〕

単相、三相ともに交流は変圧器（トランス）による電圧の変換が用意であるため、高電圧による送電で電流量を低くすることで、送電線における消費電力を抑えることができ、送電時の電力損失を低くすることができます。加えて単相と三相で同じ消費電力（瞬時電力）を得ようとした場合、単相に比べて三相のほうが電流量が小さくて済むため、やはり送電効率が向上します。

【おわりに】

今回はかなりゴリゴリ計算する問題を取り扱いましたので、若干面倒くさかったのではないのでしょうか。本問題ほどではないですが、物理でも交流を扱う際には様々な数学の公式が使われます。特に三角関数を用いた計算が多いです。和積や半角の公式など、ど忘れしてしまうと手がつけれなくなりますので、公式の覚え忘れなど無いように十分に気をつけて下さい。

以上