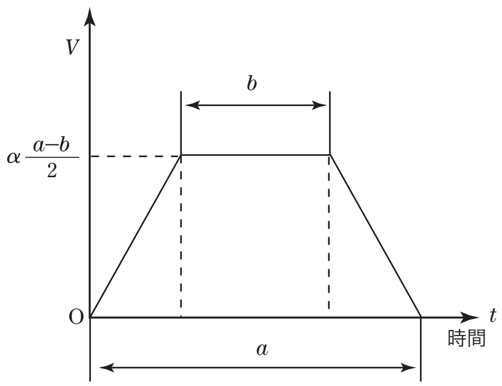
強者の戦略

第７回に引き続き，藤原です。第８回目は第７回目で紹介した，２０００年度東大後期総合科目ＩＩで出題された「自動車の走行特性」の解説を掲載したいと思います。各小問ごとに模範解答と一部の問題には＜物理的考察＞や＜補足＞を記載しました。物理前期試験などでも良く用いられる思考について，より深い所まで踏み込んで記載しましたので，物理学習を行う上での参考として下さい。

【解答解説】

1.



加速時間と減速時間は共に $\dfrac{a-b}{2}$ である。図の V–t グラフの傾きが加速度であるので，最高速度は $\alpha\dfrac{a-b}{2}$ と表される。また，グラフの積分面積が移動距離 S を表すので，

$$S=\frac{a-b}{2}\cdot\alpha\frac{a-b}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot2+b\cdot\alpha\frac{a-b}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{4S}{(a-b)(a+b)}$$

2.

加速, 減速時の電流は $i=K|\alpha|$ であり, 消費電力（単位時間当たりの発する熱）は $Ri^2=RK^2\alpha^2$ である。また, 定速時の電流は 0 であり, 消費電力も 0 である。よって発熱量の合計値は $Q=RK^2\alpha^2\cdot\alpha\dfrac{a-b}{2}\cdot2$ $=RK^2\alpha^2(a-b)$ であり，消費電力の時間平均値 W について，

$W=\dfrac{Q}{a}=\dfrac{RK^2\alpha^2(a-b)}{a}$。ここで 1. で求めた α の値を代入して，

$$W=\frac{16RK^2S^2}{a(a-b)(a+b)^2}=\frac{16RK^2S^2}{a^4(1-\beta)(1+\beta)^2}$$

となり，$f(\beta)=(1-\beta)(1+\beta)^2$ である。

3.

$f(\beta)$ が最大となるときに，W が最小となるので，その β を探す。$0<b<a$ であるので，β の定義域は $0<\beta<1$ である。また, $f'(\beta)=-(1+\beta)^2+2(1-\beta)(1+\beta)$ $=-3\beta^2-2\beta+1$ であるので，$f'(\beta)=0$ となるのは，$\beta=-1$，$\dfrac{1}{3}$ のときである。よって増減表から，$f(\beta)$ が最大，W が最小となるのは $\beta=\dfrac{1}{3}$ のときである。

β	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(\beta)$		+	0	−	
$f(\beta)$	1	↗	最大	↘	0

＜物理的考察＞

電気自動車であるので，内部電源の仕事によって自動車の運動エネルギーを生み出している。細かな要素を無視すると，
「電源のする仕事＝自動車の運動エネルギー変化＋抵抗から発するジュール熱」となる。よって，距離 S 移動する間の熱量がより少ない状態であるほど，エネルギーの効率が良い走行（燃費の良い走行）と言える。問１～３はその効率について考えており，$b/a=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow b=\dfrac{1}{3}a$ のとき，つまり加速時間，定速時間，減速時間が全て等しいときが最も効率が良い。

4.

加速度$\dfrac{dV}{dt}$について，運動方程式は次のようになる。$m\dfrac{dV}{dt}=F_{\mathrm{e}}-R_{\mathrm{a}}-R_{\mathrm{r}}-R_{\mathrm{s}}$

$\Leftrightarrow m\dfrac{dV}{dt}=F_{\mathrm{e}}-R_{\mathrm{e}}$

＜補足＞

文中の「加速に要する力」について。自動車と同じ運動をしている観測者から見ると，F_{e}，R_{e}と慣性力$m\dfrac{dV}{dt}$がつり合った状態で車が静止しているように見える。（$0=F_{\mathrm{e}}-R_{\mathrm{e}}-m\dfrac{dV}{dt}$）

高校範囲からは外れるが，全ての運動は上記のように外力と慣性力とのつり合いの式に置き換える事ができる。これを「ダランベールの原理」と呼ぶ。

5.

4.の運動方程式を与式を用いて書き直すと，

$m\dfrac{dV}{dt}=F_0+F_1V-F_2V^2-(\gamma+\delta V^2)$

$\Leftrightarrow m\dfrac{dV}{dt}=-(F_2+\delta)V^2+F_1V-(\gamma-F_0)\quad\cdots(1)$

定速のとき，$\dfrac{dV}{dt}=0$であるので，式(1)に代入してVの2次方程式の解を求めると，

$$V_{\mathrm{S}}=\frac{F_1+\sqrt{F_1^2-4(F_2+\delta)(\gamma-F_0)}}{2(F_2+\delta)}$$

$$V_{\mathrm{U}}=\frac{F_1-\sqrt{F_1^2-4(F_2+\delta)(\gamma-F_0)}}{2(F_2+\delta)}$$

6.

5.で求めたV_{S}，V_{U}は，式(1)の$\dfrac{dV}{dt}=0$のときの解であるので，これらを用いて(1)書き直すと，

$m\dfrac{dV}{dt}=-(F_2+\delta)(V-V_{\mathrm{S}})(V-V_{\mathrm{U}})$となる。ここで，両辺を$(V-V_{\mathrm{S}})(V-V_{\mathrm{U}})$で割り，変数$V$を左辺に移すと，

$$m\frac{1}{(V-V_S)(V-V_U)}\cdot\frac{dV}{dt}=-(F_2+\delta)$$

$$\Leftrightarrow\frac{m}{V_S-V_U}\left(\frac{1}{V-V_S}-\frac{1}{V-V_U}\right)\cdot\frac{dV}{dt}=-(F_2+\delta)$$

となり，両辺を時刻tで積分すると

$$\frac{m}{V_S-V_U}\left\{\log|V-V_S|-\log|V-V_U|\right\}=-(F_2+\delta)\,t+C$$

（Cは積分定数）

$$\Leftrightarrow\log\left|\frac{V-V_S}{V-V_U}\right|=-\frac{(F_2+\delta)(V_S-V_U)}{m}t+C$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{V-V_S}{V-V_U}\right|=e^C\cdot e^{-\frac{(F_2+\delta)(V_S-V_U)}{m}t}$$

となる。ここで，初期条件（$t=0$で$V=V_i$）を上記の式に代入すると$e^C=\left|\dfrac{V_i-V_S}{V_i-V_U}\right|$となるので，関係式は$\left|\dfrac{V-V_S}{V-V_U}\right|=\left|\dfrac{V_i-V_S}{V_i-V_U}\right|\cdot e^{-\frac{(F_2+\delta)(V_S-V_U)}{m}t}$となる。

7.

$F(V)=(V-V_{\mathrm{S}})(V-V_{\mathrm{U}})$と置くと，$F'(V)=2V-V_{\mathrm{S}}-V_{\mathrm{U}}$。よって，問題文の（注）より，

$$\begin{aligned}F(V_0+v(t))&=F(V)+F'(V_0)v(t)\\&=(V_0-V_{\mathrm{S}})(V_0-V_{\mathrm{U}})+(2V_0-V_{\mathrm{S}}-V_{\mathrm{U}})v(t)\end{aligned}$$

ただし，V_0はV_{S}またはV_{U}と等しい値であるので，$F(V_0+v(t))=(2V_0-V_{\mathrm{S}}-V_{\mathrm{U}})v(t)$となる。一方，$V=V_0+v(t)$の両辺を$t$で微分すると，$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dv(t)}{dt}$となる。

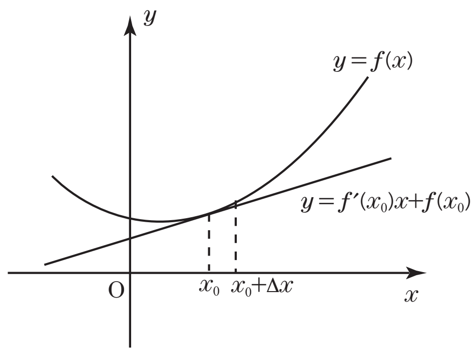
以上より，式$m\dfrac{dV}{dt}=-(F_2+\delta)(V-V_{\mathrm{S}})(V-V_{\mathrm{U}})$を$v(t)$で書き直すと，

$$m\frac{dv(t)}{dt}=-(F_2+\delta)(2V_0-V_{\mathrm{S}}-V_{\mathrm{U}})v(t)$$

＜補足＞

（注）について，微分可能な関数$y=f(x)$の$x=x_0$における接線の方程式は，$y=f'(x_0)x+f(x_0)$となる。

グラフで考えるとわかりやすいが，Δx が非常に小さな値であるとき，$x=x_0+\Delta x$ において，元の関数



と接線の y はかなり近い値となる。これを一次近似と呼ぶ。$[f(x_0+\Delta x)=f'(x_0+\Delta x)x+f(x_0+\Delta x)]$

入試で良く見かける例としては，$f(x)=(1+x)^n$ のときで, $x_0=0$ の点において, $f(0)=1$, $f'(0)=n$ であり, $f(\Delta x)=f'(\Delta x)x+f(\Delta x)$
$\Leftrightarrow (1+\Delta x)^n=n\Delta x+1$ という近似が成り立つ。

8.
$V_0=V_{\mathrm{U}}$ のとき，7. の式より

$$m\frac{dv(t)}{dt}=-(F_2+\delta)(V_{\mathrm{U}}-V_{\mathrm{S}})v(t)$$

$V_{\mathrm{U}}<V_{\mathrm{S}}$ より，$v(t)>0$ のときは $\frac{dv(t)}{dt}>0$，$v(t)<0$ のときは $\frac{dv(t)}{dt}<0$ となるため，定常速度から少しずれたとき，そのずれ $v(t)$ が時間と共にさらに大きく変化していき，もとの V_{U} に戻らない。よって，実際の走行速度にわずかなぶれがあるような場合において，V_{U} での定常走行は実現しない。

ちなみに，$V_0=V_{\mathrm{S}}$ のときは

$$m\frac{dv(t)}{dt}=-(F_2+\delta)(V_{\mathrm{S}}-V_{\mathrm{U}})v(t)$$

となり，$v(t)>0$ のときは $\frac{dv(t)}{dt}<0$，$v(t)<0$ のときは $\frac{dv(t)}{dt}>0$ となるため，定常速度から少しずれたとき，そのずれ $v(t)$ が時間と共に小さく変化していき，もとの V_{S} に戻る。

<物理的考察>

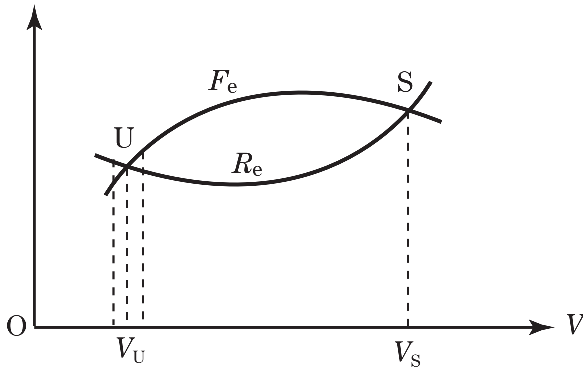


図　3

上記は誘導文に従った解法であるが，力学的に考えても上記の結論には達する。図 3 において，V_{U} よりも少し大きい速度で走行するとき，加速させる力 F_{e} が減速させる力 R_{e} より大きくなるので，速度はさらに加速する。逆に V_{U} よりも少し小さい速度で走行するとき，減速させる力 R_{e} が加速させる力 F_{e} より大きくなるので，速度はさらに減速する。このように，つり合いの状態から少しずれたとき，そのずれを大きくするような外力が働く場合を「不安定なつり合い」と呼び，一方つり合いの状態から少しずれたとき，そのずれを小さくするような外力が働く場合を「安定なつり合い」と呼ぶ。

【おわりに】

極めて数学的な問題ですが，計算方針を自分の中で打ち立てるとき, 思考のよりどころとなるのが「定性的な物理的思考の定着」であることはわかると思います。今回の問題で言えば, 高度な物理計算を行っていく際に,「加速，減速は外力で決定する。定常速度のとき，外力はつりあっている」などと言った運動の根本法則を常に念頭におくことができたかどうかで出来が大きく変わったと思います。全ての物理問題はこのように,「思考の出発点」を定着させているかどうかが何より重要な事です。