

強者の戦略

研伸館 物理科 米田 誠です。強者の戦略 HP の物理のページ、第 15 回目は『大阪大学 後期日程』からの出題です。この問題は大学で学ぶ「流体力学」で用いる基本定理「ベルヌーイの定理」を高校物理の知識を用いて解説した問題です。この「ベルヌーイの定理 (Bernoulli's principle)」は流体の速さと圧力の関係を表現するための定理で、飛行機の飛行原理の説明によく使用されています (ただし、飛行原理の説明にはニュートン力学を用いた別の説明などもあり、注意が必要です)。この問題を解くにあたって目新しい知識は必要ありません。問題文をよく読んで、教科書レベルの物理の基本法則をしっかりと適用すれば問題なく完答できるはずです。では、頑張ってください。

【問題】 ベルヌーイの定理『出典：大阪大学 後期日程 物理 (改題)』(考察時間目安：25分)

液体の中の圧力を考察しよう。液体の密度 ρ 、大気圧 P_0 は一定とする。重力加速度の大きさを g として、文中の空欄を埋め、II の問に答えよ。

I. 図 1 のように流れている液体の圧力を考察する。この流体は、ねばりけが無く、さらさらと流れている (非粘性という)。流れている流体の各部分は時間とともに移動する。液体の各部分の流れの向きをなめらかにつないだ線を流線とよぶ。液体の流れ方は時間変化せず、図 1 に描かれている流線も時間変化しない。

小さな断面 1 (面積 S_1)、断面 2 (面積 S_2) と流線によって囲まれる領域を考えよう。断面 1, 2 は流線と垂直に交わっている。断面 1 の周上を通る任意の流線は断面 2 の周上を通る。時刻 t にこの領域にある液体の部分を K と呼ぼう。 K は時間とともに、流線にそって移動するので、図 2 に描かれているように、 K は流線の形をした仮想的なホースの中をホースの壁とは摩擦なしで動いているのと同じである。断面 1, 断面 2 での流体の流れの速さを v_1, v_2 、圧力を P_1, P_2 、地上からの高さを y_1, y_2 とそれぞれ記す。

小さな時間間隔 Δt の間に断面 1 を通過する液体の質量 Δm は であり、これは断面 2 を通過する液体の質量と等しい。これより、 S_1, S_2, v_1, v_2 の間には の関係があることがわかる。これは『連続の関係式』と呼ばれる。

K は時間間隔 Δt の間に少し進み、図 2 に示すように、流線にそって破線の位置に移動した。このとき、断面 1, 断面 2 にはたらく圧力が K に仕事をする。この仕事 ΔW は、 $P_1, P_2, S_1, S_2, v_1, v_2, \Delta t$ を使って書くと、 $\Delta W =$ である。また、 Δm を用いて K の位置エネルギーの変化と運動エネルギーの変化を表すと、それぞれ , である。 K になされる仕事 ΔW は、 K の位置エネルギーと運動エネルギーの和の変化に等しい。このことを用いると、 $P_1, P_2, v_1, v_2, y_1, y_2, \rho, g$ の間の関係式を とあらわすことができる。

強者の戦略

II. 図3のように、大気中におかれた水の入った円筒形のタンクの下部に蛇口（じゃぐち）が取り付けられ、蛇口の栓が開かれて水が出ている。タンクの断面積は $S_1 = 1.00 \times 10^3 \text{ cm}^2$ 、蛇口の先端部分は円筒形で、その断面積は $S_2 = 1.00 \text{ cm}^2$ 、である。蛇口の先端部分の中に点2を考える。ある瞬間、タンクの中の水面は点2の 50.0 cm 上方に位置し、 $v_1 = 2.00 \text{ mm/s}$ の速さで下がっていた。Iで得た結果を用いて次の問に答えよ。

問 このときの点2での水の圧力 P_2 を有効数字3桁で求めよ。水の密度は $\rho = 1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、大気圧は $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、重力加速度の大きさは $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ とする。計算の過程も記述せよ。

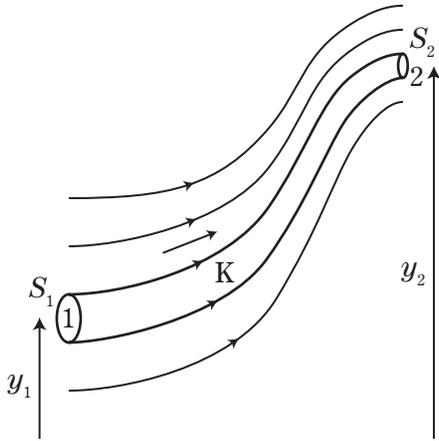


図 1

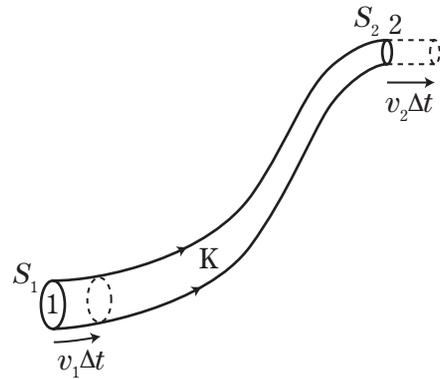


図 2

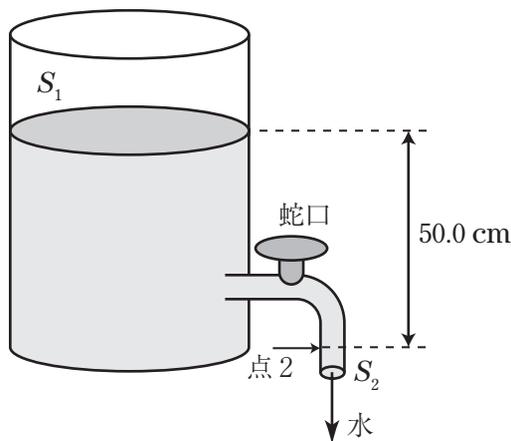


図 3