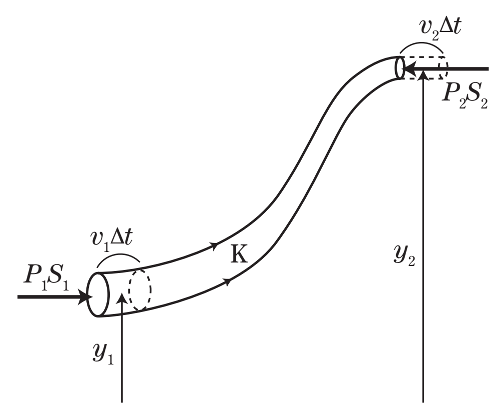
強者の戦略

研伸館 物理科の米田 誠です．強者の戦略HPの物理のページ，第16回目は第15回目で紹介した『大阪大学 後期日程 物理（改題）』からの出題，「ベルヌーイの定理」の問題についての解答解説 $+\alpha$ としたいと思います．

【解答解説】



解答図

体積 $S_1v_1\Delta t$ の液体の質量 Δm は解答図から

$$\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t \quad \cdots \boxed{1}$$

ここで，液体は非圧縮性を想定しているので，液体の密度 ρ を用いて「断面1を通過する液体の質量」=「断面2を通過する液体の質量」となり，

$$\rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t$$

$$\therefore \quad S_1 v_1 = S_2 v_2 \text{（連続の関係式）} \cdots \boxed{2}$$

断面1に働く力 P_1S_1 が K にする仕事と，断面2に働く力 P_2S_2 が K にする仕事は解答図からそれぞれ，正の仕事，負の仕事となるので，

$$\Delta W = P_1S_1v_1\Delta t - P_2S_2v_2\Delta t \quad \cdots \boxed{3}$$

ここで，K の位置エネルギーの変化量 ΔU および運動エネルギーの変化量 ΔK はそれぞれ，

$$\Delta U = \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1 = \Delta m g (y_2 - y_1) \quad \cdots \boxed{4}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m {v_2}^2 - \frac{1}{2}\Delta m {v_1}^2 = \frac{1}{2}\Delta m ({v_2}^2 - {v_1}^2)$$

$$\cdots \boxed{5}$$

以上から，エネルギーの原理（外力の仕事とエネルギーの関係）を考えて，

$$\Delta W = \Delta K + \Delta U$$

$$\to \quad P_1S_1v_1\Delta t - P_2S_2v_2\Delta t = \frac{1}{2}\Delta m({v_2}^2 - {v_1}^2) + \Delta m g(y_2 - y_1)$$

$$\to \quad P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho({v_2}^2 - {v_1}^2) + \rho g(y_2 - y_1)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 + \rho g y_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + \rho g y_2 + P_2$$

$$\cdots \boxed{6}$$

問 $\boxed{2}$ の結果に $v_1 = 2.00\times10^{-3}[\text{m/s}]$ を代入して

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2}v_1 = \frac{1.00\times10^{-1}}{1.00\times10^{-4}}\times2.00\times10^{-3} = 2.00[\text{m/s}]$$

ここで，$\rho = 1.00\times10^3[\text{kg/m}^3]$，$g = 9.80[\text{m/s}^2]$，

$y_2 - y_1 = -50.0\times10^{-2}[\text{m}]$，

$P_1 = P_0 = 1.013\times10^5[\text{Pa}]$，

を $\boxed{6}$ の結果に代入して，

$$P_2 = P_1 - \frac{1}{2}\rho({v_2}^2 - {v_1}^2) - \rho g(y_2 - y_1)$$

$$= 1.013\times10^5 - \frac{1}{2}\times1.00\times10^3\{(2.00)^2 - (2.00\times10^{-3})^2\}$$

$$-1.00\times10^3\times9.80\times(-50.0\times10)^{-2}$$

$$\fallingdotseq 1.04\times10^5[\text{Pa}]$$

【考　察】

今回の考察は
http://www.justmystage.com/home/kinoshita/lecture/ryuutairikigaku/neturyuutai(5shou).pdf
を参考にさせて頂きました。

まず $\boxed{6}$ の結果から

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy + PV = U_0(Const)\ [\text{J}]$$

…（エネルギーでの表現）

が得られる。これを両辺 V で割ると

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y + P = P_0(Const)\ [\text{Pa}] \qquad (※)$$

…（圧力での表現）

さらに両辺を ρg で割ると

$$\frac{v^2}{2g}+y+\frac{P}{\rho g}=H_0(Const)\ [\mathrm{m}]$$

…（水頭の高さでの表現）

特に，最後の「水頭の高さでの表現」を工学でよく用いる。この式での各項はそれぞれ

$\frac{v^2}{2g}$　：速度水頭または速度ヘッド

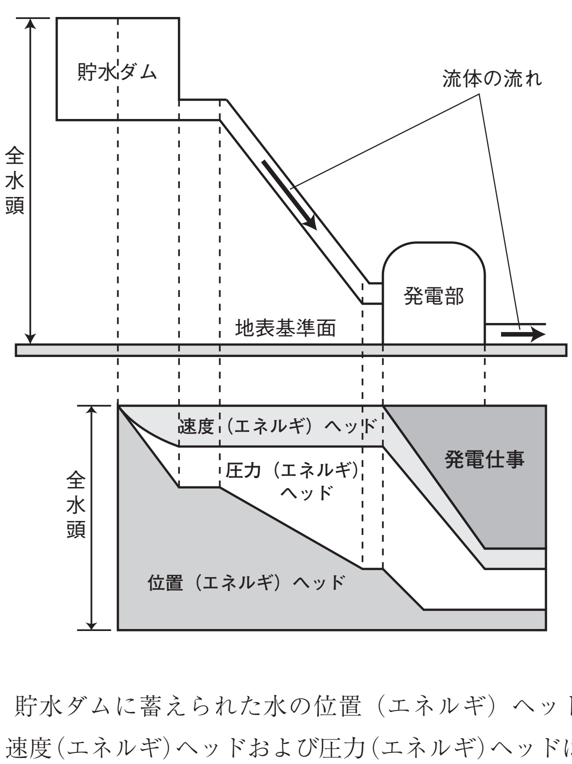
y　：位置水頭または位置ヘッド

$\frac{P}{\rho g}$　：圧力水頭または圧力ヘッド

と呼ばれる。ここで，これらの単位は $[\mathrm{m}]$ であるが，単に高さのイメージで捉えるのは危険である。例えば圧力の単位に $[\mathrm{mmHg}]$ があるように，この $[\mathrm{m}]$ の単位も単なる高さのイメージではなく，圧力もしくは $\boxed{\ 6\ }$ に示すエネルギーのイメージで捉えるのが適当である。

【ベルヌーイの定理の工学への応用例】

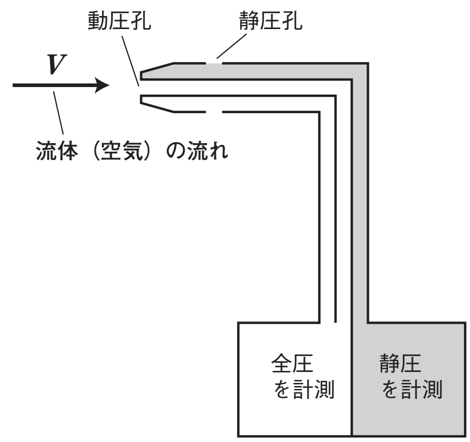
例１）水力発電



貯水ダムに蓄えられた水の位置（エネルギ）ヘッド、速度(エネルギ)ヘッドおよび圧力(エネルギ)ヘッドは，摩擦や粘性抵抗によるエネルギー損失が無視できるとき，発電部に向かって上図のように変化する。

例２）ピトー管

ピトー管とは流体の流れの速さを測定する装置で，航空機の速度計などに使用される。



ここで，ベルヌーイの定理（※）式の第１項は「動圧」といい流体の速度に依存する圧力（のようなもの。例えると風圧か。），第２項は流体の高さに伴う圧力，第３項は「静圧」といい，流体そのものが（静止状態で）外界に及ぼす圧力である。

これら３つの項の和が，動圧孔と静圧孔とで一定であり，第２項の高さの差は無視できるため，動圧孔から流入する流体が及ぼす圧力（全圧）は，流体の速さがほぼ０である図中網かけ部の圧力（静圧）とは差が生まれる。この差は流体の速さに依存した「動圧」の差であるため，

「全圧」－「静圧」＝「動圧」（＝ $\frac{1}{2}\rho V^2$）

を用いて，流体の速さを求めることができる。

【おわりに】

毎度ながら最後は工学のお話にしてしまいました。。。実際は例１も例２も，摩擦，粘性抵抗および渦の発生などの諸因子がもたらす影響も考えなければいけませんが，根本的な理論はここに示した通りです。高校生のうちに鍛えた物理量・法則を捉えるセンスが，新しい「モノ作り」には必要なのがなんとなく分かって頂けましたでしょうか。

基本・根本理論が分かっていなければ実学を理解することも応用することも出来ません。まずは足下を固める学習を心がけて下さい。