強者の戦略

研伸館 物理科 米田 誠です。強者の戦略 HP の物理のページ，第 19 回目は『東京医科歯科大学　前期日程』からの出題です．この問題は第 15 回と同様に大学で学ぶ「流体力学」で用いる基本定理「ポアズイユの法則 (*Poisuille's law*)」を高校物理の知識を用いて解説した問題です．この「ポアズイユの法則」は流体の流量と流体が流れる管の半径の関係を表した法則で，一般的に『流体の流量は管の半径の 4 乗に比例する』と表現されます。具体的に書くと，『管の半径が 2 倍になると流量が 16 倍になる』ということです。管の断面積は 4 倍にしかならないのに何故？と思いませんか．キーワードは『流体の粘性』，詳しくは問題文の中で触れていきたいと思います．加えて，この問題を解くには対数関数の微分に関する知識が若干必要ですが，『強者』であれば大丈夫ですよね．問題文を正しく読んで理解し，教科書レベルの物理の基本法則（と少しの数学の知識）をしっかり適用すれば問題なく完答できるはずです．では，頑張って下さい．

【問題】ポアズイユの法則『出典：東京医科歯科大学　前期日程　物理（改題)』（考察時間目安：４５分）

私たちが物体の運動を解析するとき，まず，理想化した条件下で考える．例えば，物体の体積が 0（質点）であるとか，空気抵抗や摩擦がないとかいう条件をつける。しかし，現実の世界では，体積が 0 である物体はなく，空気や水のような流体の抵抗や摩擦が問題となることも多い。

バケツに水をいれ，棒で回転させてみる。水は渦を巻いているが，そのまま放置しておくと，やがて水は静止する。これはバケツの壁面と水の間の摩擦の他に，速度の違う水の層の間の摩擦（**粘性抵抗**）があるためである。もし，空気が水と同程度の粘性をもっていたら，私たちの日常は今とは全く異なるであろうことが容易に想像できる。粘性は，流体の特性を表す重要な物理量の一つである。

水道の蛇口をほんの少し開け，糸を引くように水を流してみる。この流れのように乱れがなく流れの方向がそろった規則的な流れを**層流**（**層流れ**）という。

図 1 のように，y 軸の正の向きに流れている層流の中に，xy 平面に平行で面積 S の十分に薄い流体の層を 2 つ，Δz だけ離して仮想的に考える。層 A，層 B は，それぞれ v_1，v_2（$v_1 > v_2$）で，y 軸の正の向きに流れているとする。流体に粘性があると，この 2 つの層は流速をそろえようと互いに力をおよぼし合う。つまり，層 A は層 B を引っ張って v_1 に近づけようとし，逆に層 B は層 A を v_2 に近づけようとする。この力の大きさ（F）は面積（S）と 2 つの層の流れに直角の方向への流速の勾配 $\left(\dfrac{v_1 - v_2}{\Delta z}\right)$ に比例する。つまり，

$$F \propto S \cdot \frac{v_1 - v_2}{\Delta z} = S \cdot \frac{\Delta v}{\Delta z} \qquad （式 1）$$

となる。

ここで，層 B を層 A に近づけていき，その極限（$\Delta z \to 0$）を考える。流速 v が z のみに依存するものとすると，（式 1）は，（式 2）のように微分で表すことができ，これが，層 A と層 B が接しているときに，層の間にはたらく力（**粘性力**）である。

$$F = \eta \cdot S \frac{dv}{dz} \qquad （式 2）$$

ここで，比例定数 η のことを**粘性係数**（**粘度**）という。

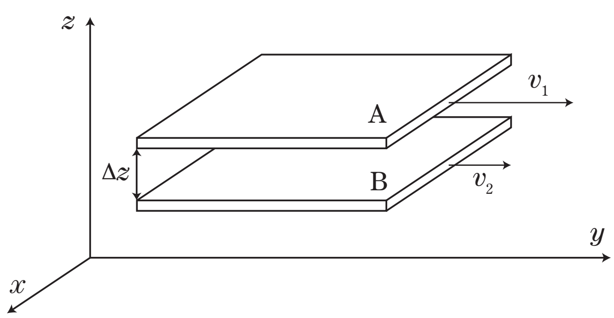


図 1　層流中に仮想的に考えた 2 つの流体の層

（流体層は xy 平面に平行，面積は S で y 軸の正の向きに，v_1，v_2 の流速で流れている。）

問１　粘性係数の次元（ディメンジョン）を質量 $[M]$，長さ $[L]$，時間 $[T]$ を用いて表せ。

水の粘性係数を求めるための簡単な装置（図 2）を作ってみた。図 2 に示した実験装置は，少量の水が A から流れ出すように水道の蛇口（B）を調整することで，水面が一定に保たれるようになっている。この円筒の底近くに毛細管を取り付け，この管から流出する水をビーカー（D）で受けるようになっている。この実験装置をつかって一定時間に流出する水の量を測定することで，水の粘性係数を求めることができる。

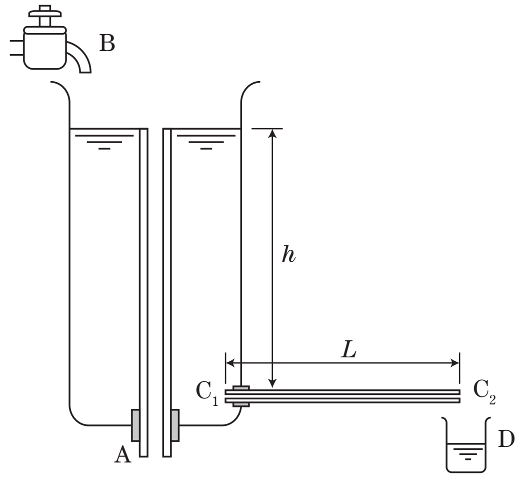


図 2　水の粘性係数の測定装置

A：水があふれ出る出口，B：水道の蛇口
C_1，C_2：毛細管の両端の断面，D：ビーカー
L：毛細管の長さ
h：毛細管の中心から水面までの高さ

問２　毛細管を図 2 に示す実験装置に取り付ける前に，管の半径 b（内径を $2b$ とする）をあらかじめ測定しておこう。そのためによく乾かした毛細管に注射器で適当量の水銀を注入し，その時の水銀の長さ l を測定する。次に，管より水銀を出し，その質量 m を測定する。室温における水銀の密度を σ として，毛細管の半径 b を l，m，σ をもちいて表せ。

毛細管の内径が小さく，流速も小さい（遅い）時には，管の中の水の流れは層流となるので（式 2）が成り立つ。太さ一様な毛細管の中を水の粘性に逆らって一定量の水が流れるためには，管の両端に圧力差 ΔP がなければならない。毛細管の両端の断面 C_1，C_2 にかかる圧力をそれぞれ P_1，P_2 とすると，$\Delta P = P_1 - P_2$ である。毛細管の長さを L，半径を b とし，図 3 の色付き部で示したような，管と同軸で半径 r の円柱形の流体（水）を仮想的に考える。

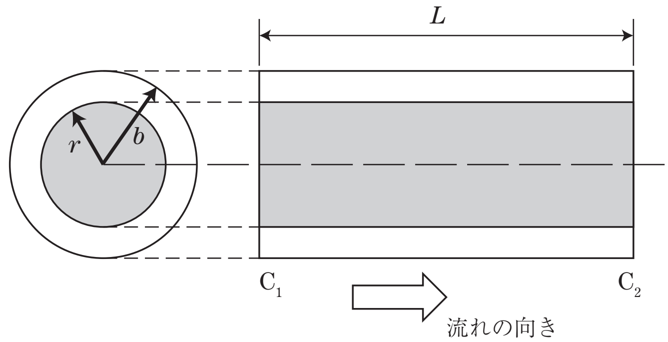


図 3　毛細管中に考えた半径 r の仮想円柱（色付き部）

問３　① 水の流速が小さい（遅い）ときには，水の運動エネルギーが無視できるので，圧力差は位置エネルギーのみに依存する。実験時の水温における水の密度を ρ，重力加速度を g として，ΔP を求めよ。

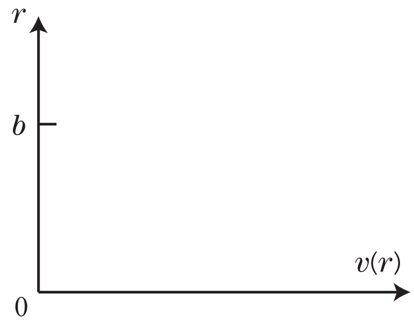
② 半径 r の円柱に，圧力差によって流れの向きにはたらく力（F_1）を求めよ。

③ 流速は，中心軸からの距離 r に依存している。位置 r における流速を v とし，半径 r の円柱の表面に流れと反対の向きにはたらく粘性力（F_2）を（式 2）の形に表せ。ただし，粘性係数を η とする。

水の流れが一定であるということは，円柱にかかる圧力差による流れの向きの力と，粘性力による流れとは反対の向きの力がつり合っているということである。

問４　① 円柱にかかる力のつり合いの式を求めよ。

② 管壁（$r=b$）では，流速が 0 であると考えてよい。問 4 ①のつり合いの式より毛細管の動径方向（r の方向）の速度を r の関数 $v(r)$ として求めよ。またこれを図示せよ。



③ もし，v が一定ならば，時間 t に毛細管から流出する水の体積は（断面積）×（vt）である。しかし問 4 ②で求めたように，v は r の関数である。このことを考慮して，毛細管を通って時間 t に流出する水の体積 V を求めよ。

④ 水の粘性係数 η を l，m，σ，L，ρ，g，h，t，V を用いて表せ。