

強者の戦略

物理の内多です。前回は米田先生による「ポアズイユの法則」についての問題および解説でした。深い思考力を必要とした、非常に興味深い問題でした。さて、今回は趣向を変えましょう。少々古いですが、1996年の東京大学後期試験の力学の問題にチャレンジです。テーマはずバリ「近似計算の処理」。問題を解くために必要な公式はごく一般的なものばかりですが、東大らしい、高度な計算処理が必要です。この問題の掲載が7月末、となりそうですから、どうでしょう、真夏の夜に、自らの物理的・数学的知識を総動員してこの問題に挑戦する、というものもまた一興ではないでしょうか。そうですね・・・腕に自信あり、な方は解くまでの時間を計ってみてはどうでしょう？後ほど掲載される解答編では、私が大学生だった頃に解いた時の大体の所要時間を記載することにします。さあ、昔の私と勝負しませんか（笑）？（なお、計算過程を少しだけ楽にするために、一部改題を施しました）

【問題】

両端に質量 m の球のついたバネ定数 k のバネが無重量状態の宇宙空間に静止している。初めこのバネは回転も振動もしておらず、そのバネ長（両端間の距離）は l_0 であった（図1）。

I

しばらく時間が経った後に再び観察したところ、バネは振動していないがバネ長が l になっており、両端の球は等速円運動していた（図2）。この等速円運動の角速度は ω であった。バネの伸び $l - l_0$ はいくらか。ただし、バネの質量は無視できるほど小さいとする。

II

いま、両端の球が同時に分裂し、その各々の球の円運動の方向と反対方向に質量 Δm の小片を放出した。その小片のものと球に対する相対速度は v であり、またこの分裂はバネの振動運動を引き起こさなかった（図3）。この分裂後の球の円運動の角速度およびバネ長の変化を $\omega \rightarrow \omega + \Delta\omega$ 、 $l \rightarrow l + \Delta l$ とし、以下の問いに答えよ。ただし、 $\frac{\Delta m}{m}$ 、 $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ 、 $\frac{\Delta l}{l}$ は絶対値がすべて1よりも非常に小さいと仮定し、それらについての2次以上（例えば $\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2$ や $\left(\frac{\Delta m}{m}\right)\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)$ など）を無視して計算せよ。

- (1) 分裂後の球の円運動の角速度の変化分 $\Delta\omega$ を求めよ。（ Δm 、 m 、 k 、 l 、 ω 、 v を用いよ）
- (2) 分裂後のバネ長の変化分 Δl を求めよ。（ Δm 、 m 、 k 、 l 、 ω 、 v を用いよ）
- (3) バネ長の変化分 Δl を分裂する際の小片の相対速度 v の関数として図示せよ。また、 l が分裂の前後で変わらない（ $\Delta l = 0$ ）特別な相対速度（臨界速度） v_0 があるが、 Δl がこの臨界速度の前後、すなわち $v > v_0$ および $v < v_0$ で符号を変える理由を定性的に説明せよ。

III

臨界速度 v_0 で分裂すると、バネ長が l に保たれたまま球の円運動の角速度が増加する。しかしこの過程で各々の球の運動エネルギーは一定で変化しないことを示せ。

強者の戦略

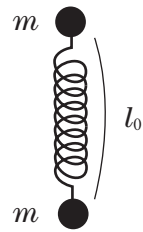


図 1

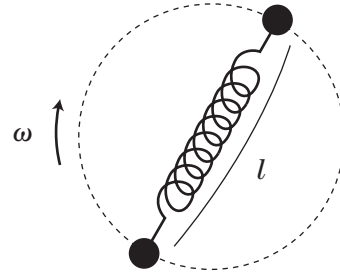


図 2

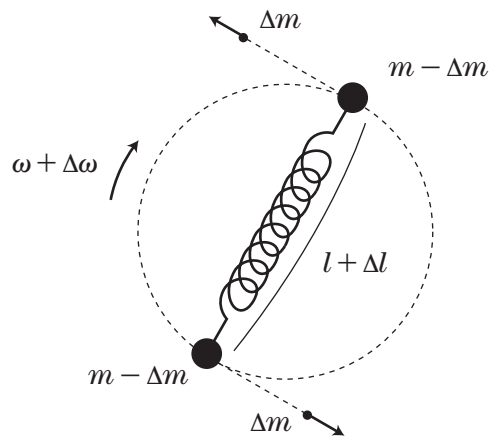


図 3