強者の戦略

研伸館の藤原です。強者の戦略 HP 物理ページ第２３回（問題編）第２４回（解答編）を担当させてもらいます。

今年（２０１１年）の９月に報じられたニュースに，心が踊った人は沢山おられるかと思われます。スイス・ジュネーブの粒子加速器から放出したニュートリノをイタリアのグランサッソ地下研究所で観測し，その速さを測定する国際共同実験。この実験から「質量をもつニュートリノが光速を超える」可能性が示唆されました。これは，現代物理学の理論と矛盾する結果であり，測定結果の正確性を確認された後，「特殊相対性理論」を大幅に見直す必要性が出てきました。「今までの理論で，様々な現象を非常に的確に予測することが出来たのだから，一から理論を再構築するのではなく，微修正するだけだろう」という大人の意見もありますが，個人的には「物理学の新たな地平が見えてきた！！」とみんなで子供っぽくワクワクする方が楽しいですし，斬新な理論が生まれてくるんじゃないだろうか，と思います。

さて，上記に出てきた「相対性理論」ですが，ご存知の通りアルベルト・アインシュタインが構築した光速を基準とした時間と空間に関する法則をまとめた理論です。アインシュタインはこれ以外にも「光量子仮説」「個体比熱理論」「ボース＝アインシュタイン凝縮」など，古典物理学では説明できなかった諸現象について様々な功績をもたらしており，20 世紀の現代物理学の最大の功労者と言われています。

もちろん高校生の皆さんが習う物理はほとんど「古典物理学」なので，上記の理論が出題されることはほぼありません（京大志望なら光量子仮説は出題されるかもしれませんが）。ただ一つだけ，古典物理の理論から考察できるテーマがありまして，それが以下に出題する「◯◯◯◯運動」です（名称を伏字にして置きます）。実際に数年前に慶應義塾大学の問題として出題されましたので，もしかしたら既に解いたことがある人も知れません（ごめんなさい）。「普段の学習では出会わないである問題を取り扱おう」という，このページの目的から少々外れるかもしれませんが，強者の皆さんにちょうど良い難易度の問題ですので，個人的な趣味も含めて是非紹介させて頂きます。挑戦してみて下さい。

【問題】◯ラ◯◯運動　『出展：２００９年度　慶応義塾大学　医学部』（考察時間目安：２５分）

以下の問１～５に答え，$\boxed{\quad ア \quad}$～$\boxed{\quad ク \quad}$に当てはまる式を解答群から選び番号で答えよ。

問１　19 世紀にイギリスの植物学者が花粉から放出された粒子が水中で不規則な運動をすることを発見した。このような運動の名称を述べよ。

問２　気体中を漂う粒子（粒子 1，2，3）の時刻 t における位置ベクトル $\vec{r}\ (t)$ を１秒ごとに測定した。粒子は３次元空間を運動するが，ここでは x, y 成分のみを測定したので，$\vec{r}\ (t)$=($r_x(t)$, $r_y(t)$) のように２成分ベクトルが求まる。右の図１は，$\vec{r}\ (0)$ を原点として，$\vec{r}\ (0)$，$\vec{r}\ (1)$，$\vec{r}\ (2)$，…，$\vec{r}\ (10)$ を直線で結んだ結果である。粒子１について，$r(t)=\sqrt{r_x(t)^2+r_y(t)^2}$ を時間の関数として，次ページのグラフ表に折れ線グラフで示せ。

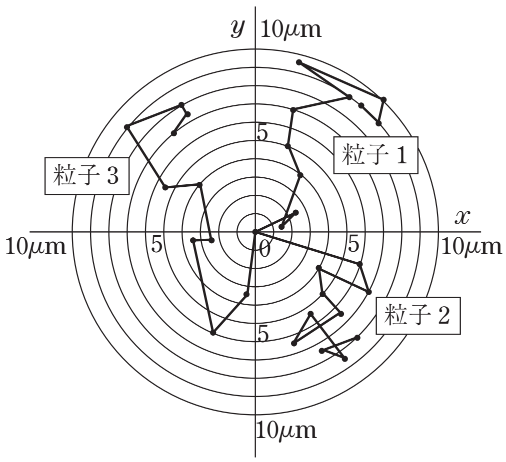
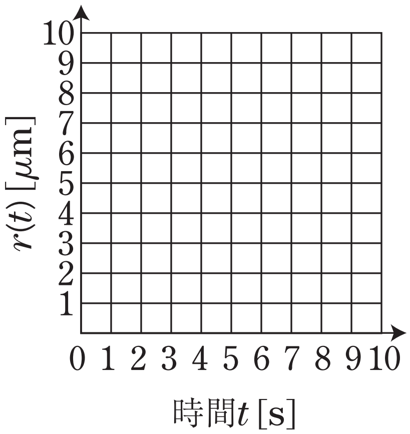


図　1



問３　多数の粒子に対する $r(t)^2$ の平均値 $\overline{r(t)^2}$ を求めると，$\overline{r(t)^2}=4Dt$ の関係があることが理論的に分かっている。図１を用いて，$t=10\,\mathrm{s}$ における粒子１，２，３の測定結果から係数 D を有効数字２桁で求めよ。

問４　つぎに，気体中を漂う粒子の２次元運動を理論的に考える。ここでは，複数の気体原子（以下，原子とする）が同時に粒子に衝突することはなく，粒子と原子の衝突は弾性衝突とし，重力の影響は無視する。ベクトルの大きさはベクトル記号から矢印を外した記号で表す。

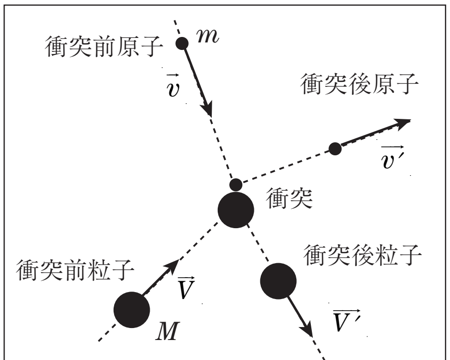


図　２

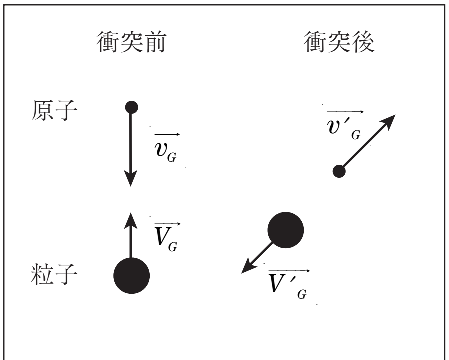


図　３　重心を基準とした相対速度

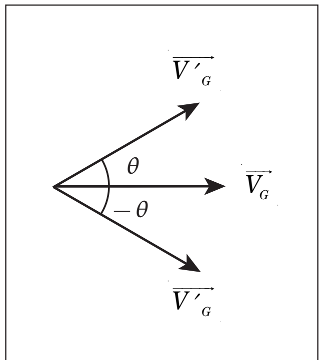


図　４

図２に示すような粒子と原子の衝突を考える。粒子の質量を M，原子の質量を m，衝突前の粒子の速度を $\vec{V}=(V_x,\ V_y)$，衝突前の原子の速度を $\vec{v}=(v_x,\ v_y)$，衝突後の粒子の速度を $\vec{V'}=(V'_x,\ V'_y)$，衝突後の原子の速度を $\vec{v'}=(v'_x,\ v'_y)$ とする。衝突に伴う粒子の運動エネルギーの変化 ΔK は，M，$\vec{V}$，$\vec{V'}$ を用いて表すと，

$\Delta K=$（衝突後の粒子の運動エネルギー）$-$（衝突前の粒子の運動エネルギー）$=$ $\boxed{\text{ア}}$
となる。

粒子と原子の重心の速度 $\vec{v_C}=(v_{Cx},\ v_{Cy})$ は，

$$\vec{v_C}=\frac{M\vec{V}+m\vec{v}}{M+m}$$

である。重心に対する相対速度を求めよう（図３参照）。衝突前の粒子の相対速度 $\vec{V_G}=(V_{Gx},\ V_{Gy})$ と衝突

前の原子の相対速度$\overrightarrow{v_G}=(v_{Gx},\ v_{Gy})$は$M$，$m$，$\vec{V}$，$\vec{v}$を用いて表すと，

$$\overrightarrow{V_G}=\vec{V}-\overrightarrow{v_C}=\boxed{\text{イ}}$$
$$\overrightarrow{v_G}=\vec{v}-\overrightarrow{v_C}=\boxed{\text{ウ}}$$

となる。また，$\overrightarrow{v_C}$はM，m，$\overrightarrow{V'}$，$\overrightarrow{v'}$を用いて表すと，$\overrightarrow{v_C}=\boxed{\text{エ}}$となる。このことを用いると，重心に対する衝突後の粒子の相対速度$\overrightarrow{V'_G}=(V'_{Gx},\ V'_{Gy})$と衝突後の原子の相対速度$\overrightarrow{v'_G}=(v'_{Gx},\ v'_{Gy})$は$M$，$m$，$\overrightarrow{V'}$，$\overrightarrow{v'}$を用いて表すことができる。粒子と原子の衝突が弾性衝突なので，$\overrightarrow{V_G}$，$\overrightarrow{V'_G}$との間には，$V_G=V'_G$の関係がある。

ΔKは，M，$\overrightarrow{V_G}$，$\overrightarrow{V'_G}$，$\overrightarrow{v_C}$を用いて表すと，

$$\Delta K=M\times(\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}})$$

となる。

つぎに，ΔKの平均値を求める。粒子と原子の衝突は一定ではないので，同一の$\overrightarrow{V_G}$と$\overrightarrow{v_G}$の組であっても，衝突後はいろいろな速度になる。このため，$\overrightarrow{V'_G}$と$\overrightarrow{V_G}$のなす角度がθとなる場合と$-\theta$となる場合が同じ頻度で生じ（図4参照），$\overrightarrow{V'_G}$の平均は，$\overline{\overrightarrow{V'_G}}=\cos\theta\,\overrightarrow{V_G}$となる。このことから，$\Delta K$の平均値$\overline{\Delta K}$は$M$，$\theta$，$\overrightarrow{v_C}$，$\overrightarrow{V_G}$を用いて表すと，

$$\overline{\Delta K}=M(\cos\theta-1)\times\boxed{\text{キ}}$$

となる。$\overrightarrow{v_C}$と$\overrightarrow{V_G}$は$\vec{V}$と$\vec{v}$により表すことができるので，$\overline{\Delta K}$は，

$$\overline{\Delta K}=2\frac{(\cos\theta-1)Mm}{(M+m)^2}\left(\frac{1}{2}MV^2-\frac{1}{2}mv^2+\boxed{\text{ク}}\times\frac{1}{2}(v_xV_x+v_yV_y)\right)$$

となる。

最後に，衝突前の速度$\vec{V}$と$\vec{v}$に関する平均を考えよう。粒子と原子はどちらも乱雑に動いているので，粒子の速度が$\vec{V}$のときの原子の速度は$\vec{v}$と$-\vec{v}$が同じ頻度で存在する。このことから，衝突前の速度に関する平均を行うと$\overline{v_xV_x+v_yV_y}=0$となる。衝突前の速度に関する平均と$\theta$が0から180度まで取り得ることを考慮した平均を$\overline{\Delta K}$に対して行うと，

$$\overline{(\overline{\Delta K})}=2\frac{(\overline{\cos\theta}-1)Mm}{(M+m)^2}\left(\frac{1}{2}M\,\overline{V^2}-\frac{1}{2}m\,\overline{v^2}\right)$$

となることが導かれる。

問5　気体の温度が一定の場合，$\overline{(\overline{\Delta K})}$から，粒子の運動エネルギーの平均値は多数回衝突するとどのようになるといえるか。理由を付けて述べよ。

$\boxed{\text{ア}}$の解答群

① $\frac{1}{2}M(V_xV'_x-V_yV'_y)$　② $\frac{1}{2}M(V_xV'_y-V_yV'_x)$　③ $\frac{1}{2}M(V'^2-V^2)$

④ $\frac{1}{2}M(V^2-V'^2)$

$\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$の解答群

① $\dfrac{m(\vec{V}+\vec{v})}{M+m}$　② $\dfrac{m(\vec{V}-\vec{v})}{M+m}$　③ $\dfrac{m(\vec{v}-\vec{V})}{M+m}$

④ $\dfrac{M(\vec{V}+\vec{v})}{M+m}$　⑤ $\dfrac{M(\vec{V}-\vec{v})}{M+m}$　⑥ $\dfrac{M(\vec{v}-\vec{V})}{M+m}$

$\boxed{\text{エ}}$の解答群

① $\dfrac{m\overrightarrow{V'}+M\overrightarrow{v'}}{M+m}$　② $\dfrac{m\overrightarrow{V'}-M\overrightarrow{v'}}{M+m}$　③ $\dfrac{m(\overrightarrow{v'}+\overrightarrow{V'})}{M+m}$

④ $\dfrac{M\overrightarrow{V'}+m\overrightarrow{v'}}{M+m}$　⑤ $\dfrac{M\overrightarrow{V'}-m\overrightarrow{v'}}{M+m}$　⑥ $\dfrac{M(\overrightarrow{v'}+\overrightarrow{V'})}{M+m}$

$\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$の解答群

① $v_C V_G$　② $v_C V'_G$　③ $v_C\sqrt{V_G V'_G}$

④ $v_C(V_G+V'_G)$　⑤ $v_{Cx}V_{Gx}+v_{Cy}V_{Gy}$　⑥ $v_{Cx}V'_{Gx}+v_{Cy}V'_{Gy}$

⑦ $v_{Cx}V_{Gy}+v_{Cy}V_{Gx}$　⑧ $v_{Cx}V'_{Gy}+v_{Cy}V'_{Gx}$

$\boxed{\text{ク}}$の解答群

① $M+m$　② $-M-m$　③ $M-m$

④ $m-M$　⑤ $\sqrt{Mm}$　⑥ $-\sqrt{Mm}$

⑦ $\dfrac{Mm}{M+m}$　⑧ $-\dfrac{Mm}{M+m}$