強者の戦略

第２３回に引き続き，藤原です。第２４回目は第２３回目で紹介した問題の解説です。模範解答だけでなく，＜追記＞や＜考察＞の部分では，少し踏み込んだお話や，細かい点に関する疑問にも触れております。実利を求める方には，少々不必要と思える話もありますが，視野を広げる事も意識して，これらの部分にも興味を持って読んで頂けたら幸いです。

【解答解説】

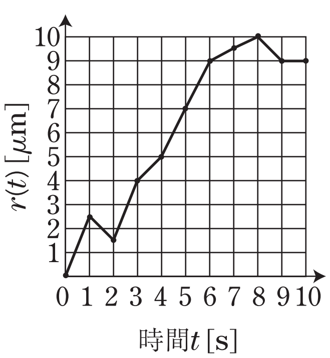
問１　ブラウン運動。

＜追記１＞

発見者は植物学者ロバート・ブラウン氏で，氏はこの現象（粒子の不規則な運動）を生物学的な要因によるものと考察しました。後にアインシュタインが，熱運動する水分子との衝突を原因とした，物理学的現象であると説明しました。

問２

$t=1, 2, \cdots, 10$ における，粒子１の原点からの距離（位置ベクトルの大きさ）をプロットしていけば良い。答えは下図。



問３

$t=10$[s] における，粒子 1，2，3 の $r(t)^2$ の値は図１より，$(9\times10^{-6})^2$，$(8\times10^{-6})^2$，$(7\times10^{-6})^2$[m^2]。よって平均値について，

$$\overline{r(t)^2} = \frac{(9.0^2+8.0^2+7.0^2)\times(10^{-6})^2}{3} = 194\times10^{-12}$$

となり，与式について

$$4D\times10 = \overline{r(t)^2} \quad \Leftrightarrow \quad D = \frac{\overline{r(t)^2}}{40} \fallingdotseq 1.6\times10^{-12}$$

＜追記２＞

（以下の部分は，入試には全く関係ありませんので，読み飛ばしてもらっても結構です。）

複数の微視的な粒子について，力学と確率・期待値の考え方などを用いて，粒子全体の運動のおおよその振る舞い方を予測していく学問を「統計力学」と呼びます（実際には，膨大な粒子を主に扱う為，期待値の精度は非常に高くなる）。今回の与式もその一つの分野です。

例えば粒子全体の重心を原点として，初め (t=0) 全粒子が原点から出発したケースを考えてみると，放っておけばランダムに動く各粒子が徐々に拡散してゆき，原点からの距離 $r(t)$ の全粒子の２乗平均値 $\overline{r(t)^2}$ は時刻 t とともに増加いくのが予想されますね。

期待値（未来平均値）として，およそどのように拡散してゆくかの予測として，$\overline{r(t)^2} = 4(\dfrac{RT\mu}{N_A})t$ という公式が発見されています。$\dfrac{RT\mu}{N_A}$ の部分は粒子の周りにある環境（原子・分子の状態）で定まる数字で，拡散係数と呼ばれます。気体定数 R とアボガドロ数 N_A で定まるボルツマン定数 $\dfrac{R}{N_A}$ はご存知の人も多いかと思いますが，拡散にはさらに絶対温度 T，易動度 μ（抵抗力 kv などにおける抵抗係数 k の逆数）が関係してきます。また，4 という係数は，今回の様に２次元の拡散が行われた場合で，１次元のときは２，３次元のときは６になります。

導出は多少冗長になりますので，今回は公式の紹介に留めておきます。本問題の主題は次の問４です。

問 4

$\boxed{\text{ア}}$ ③

粒子の速度ベクトルの大きさを $|\vec{V}| = V$, $|\vec{V'}| = V'$ として,

$$\Delta K = \frac{1}{2}MV'^2 - \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M(V'^2 - V^2)$$

$\boxed{\text{イ}}$ ② $\boxed{\text{ウ}}$ ⑥

相対速度は観測者の速度を引く事で求まる。粒子，原子の重心に対する（重心から見た）相対速度は,

$$\overrightarrow{V_G} = \vec{V} - \overrightarrow{v_C} = \vec{V} - \frac{M\vec{V} + m\vec{v}}{M+m} = \frac{m(\vec{V} - \vec{v})}{M+m}$$

$$\overrightarrow{v_G} = \vec{v} - \overrightarrow{v_C} = \vec{v} - \frac{M\vec{V} + m\vec{v}}{M+m} = \frac{M(\vec{v} - \vec{V})}{M+m}$$

$\boxed{\text{エ}}$ ④

衝突による速度変化では運動量が保存され，重心速度は衝突前後で一定である。

$$\overrightarrow{v_C} = \frac{M\overrightarrow{V'} + m\overrightarrow{v'}}{M+m}。$$

また，衝突後の重心から見た相対速度は,

$$\overrightarrow{V'_G} = \overrightarrow{V'} - \frac{M\overrightarrow{V'} + m\overrightarrow{v'}}{M+m} = \frac{m(\overrightarrow{V'} - \overrightarrow{v'})}{M+m}$$

$$\overrightarrow{v'_G} = \overrightarrow{v'} - \frac{M\overrightarrow{V'} + m\overrightarrow{v'}}{M+m} = \frac{M(\overrightarrow{v'} - \overrightarrow{V'})}{M+m}$$

となる。

＜考察 1＞

今回の問題は重心速度の式が与えられていますが，重心の位置，速度については入試において理解しておくべきだと思いますので，以下に記します。

質量 M, m の 2 物体の重心の位置の定義は「2 物体の位置を，質量の逆比 m:M で内分した点」です。よって，M の位置 $\vec{R} = (X, Y)$, m の位置 $\vec{r} = (x, y)$ として，重心の位置 $\vec{r_c}$ は,

$$\vec{r_c} = (x_C, y_C) = \left(\frac{MX + mx}{M+m}, \frac{MY + my}{M+m}\right)$$

$$= \frac{M}{M+m}(X, Y) + \frac{m}{M+m}(x, y)$$

$$= \frac{M}{M+m}\vec{R} + \frac{m}{M+m}\vec{r}$$

と表すことが出来ます。

運動している間，$\vec{R}$, $\vec{r}$ は時刻 t によって変化し，それに伴い $\vec{r_c}$ も変化します（重心も動いていく）。

重心の速度ベクトル $\overrightarrow{v_C} = \dfrac{d\vec{r_c}}{dt}$ について考えると,

$$\overrightarrow{v_C} = \left(\frac{dx_c}{dt}, \frac{dy_c}{dt}\right)$$

$$= \frac{M}{M+m}\left(\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}\right) + \frac{m}{M+m}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{M}{M+m}\cdot\frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{m}{M+m}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \frac{M}{M+m}\vec{V} + \frac{m}{M+m}\vec{v}$$

すなわち重心速度とは複数の物体の「平均速度」と捉えることができ，その値は「（運動量の和）÷（質量の和）」で決まります。よって，衝突問題のような運動量が保存される「作用・反作用系の運動」において，重心の速度は一定となります。

$\boxed{\text{オ}}$ ⑥ $\boxed{\text{カ}}$ ⑤

上の問題より，$\vec{V} = \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{v_C}$, $\overrightarrow{V'} = \overrightarrow{V'_G} + \overrightarrow{v_C}$ であるので，$\boxed{\text{ア}}$ の式に代入して,

$$\Delta K = \frac{1}{2}M\left|\overrightarrow{V_G'} + \overrightarrow{v_C}\right|^2 - \frac{1}{2}M\left|\overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{v_C}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}M\{V_G'^2 + 2\,\overrightarrow{V_G'}\cdot\overrightarrow{v_C} + v_c^2\}$$

$$- \frac{1}{2}M\{V_G^2 + 2\,\overrightarrow{V_G}\cdot\overrightarrow{v_C} + v_c^2\}$$

与式 $V_G' = V_G$ より,

$$\Delta K = M\{\overrightarrow{V_G'}\cdot\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{V_G}\cdot\overrightarrow{v_C}\}$$

$$= M\{(v_{Cx}V_{Gx}' + v_{Cy}V_{Gy}') - (v_{Cx}V_{Gx} + v_{Cy}V_{Gy})\}$$

＜考察２＞

問題文中で与えられた「弾性衝突なので，$V_G' = V_G$」について，何となく納得させられてしまいそうになりますが，$V' \neq V$であることを考えると，「重心から見たら何故？」という疑問が湧いてきます。

もちろん，誘導に素直に従えば解答にたどり着くのですが，これは高校物理の法則から十分に説明ができますので，類題が出題された場合に対応するために，以下に解説します。

そもそも，静止した観測者から見た運動系に置いて保存則の成立条件が満たされていたとしても，それがそのまま相対速度においても成立しているとは限りません。相対速度の変化には，慣性力の影響も考慮すべきだからです。

ただし今回の様に，等速（加速度 0）である重心から見た運動の場合，慣性力は 0 であり，相対速度でも保存則を適用することができます。

実際に式で表してみましょう。今回の衝突問題は作用反作用系なので，運動量は衝突前後で保存されます。さらにその値は，**（M+m）全体が重心速度で動いている場合と一致**します。

$$M\overrightarrow{V'} + m\overrightarrow{v'} = M\vec{V} + m\vec{v} = (M+m)\overrightarrow{v_C}$$

この式に $\vec{V} = \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{v_C}$， $\vec{v} = \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{v_C}$， $\overrightarrow{V'} = \overrightarrow{V'_G} + \overrightarrow{v_C}$，$\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v'_G} + \overrightarrow{v_C}$ を代入して整理すると，

$$M\overrightarrow{V'_G} + m\overrightarrow{v'_G} = M\overrightarrow{V_G} + m\overrightarrow{v_G} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{V_G} = -\frac{m}{M}\overrightarrow{v_G},\quad \overrightarrow{V'_G} = -\frac{m}{M}\overrightarrow{v'_G} \quad \cdots(※)$$

となり，この式は**「重心と同じ運動をしている観測者から見てＭとｍは，逆向きの速度ベクトルで運動をしながら不動重心に向かって直進し，衝突後も逆向きの速度ベクトルで運動をしながら，不動重心から離れていく。」**という意味を持ちます（すなわち図3のような運動）。また，その速さ（速度の大きさ）の比は衝突前後で変わらず $\frac{m}{M}$ のまま，となります。

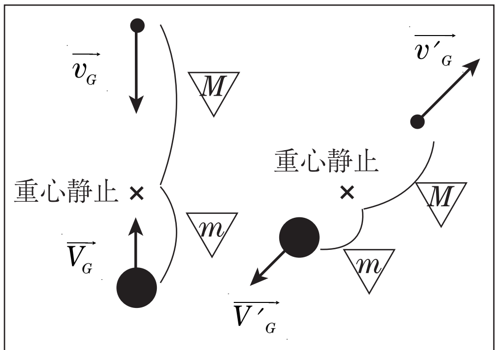


図　3　重心に対する距離・速度が一定の比を保ちながら動く。

一方で，“弾性衝突”とは力学的エネルギーが保存される衝突を指しますので，

$$\frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

この式に $\vec{V} = \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{v_C}$， $\vec{v} = \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{v_C}$， $\overrightarrow{V'} = \overrightarrow{V'_G} + \overrightarrow{v_C}$， $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v'_G} + \overrightarrow{v_C}$ を代入すると，

$$\frac{1}{2}M\{{V_G'}^2 + 2\overrightarrow{V_G'}\cdot\overrightarrow{v_C} + v_c^2\} + \frac{1}{2}m\{{v_G'}^2 + 2\overrightarrow{v_G'}\cdot\overrightarrow{v_C} + v_c^2\}$$
$$= \frac{1}{2}M\{V_G^2 + 2\overrightarrow{V_G}\cdot\overrightarrow{v_C} + v_c^2\} + \frac{1}{2}m\{v_G^2 + 2\overrightarrow{v_G}\cdot\overrightarrow{v_C} + v_c^2\}$$

式 (※) を用いると内積は消去され，

$$\frac{1}{2}M{V_G'}^2 + \frac{1}{2}m{v_G'}^2 = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}mv_G^2$$

となり，相対速度でも力学的エネルギーは保存されるます。さらに，$V_G = \frac{M}{m}v_G$，$V_G' = \frac{M}{m}v_G'$ を用いて v_G，v_G' を消去すると $V_G' = V_G$ が導かれます。

もちろん，以上の導出を実際に問題を解く際に一々導き出す必要はありません。以上の証明を一回

納得して頂いたら，実際には「作用・反作用系の運動を重心から見ると，静止した重心の周りで個々の物体が対照的に動き，その速さ・重心からの距離は一定比を保つ」という結論を用いて問題を解いてもらっても差し支えありません。

また，「原則的に保存則は相対速度で立式しない。ただし観測者が等速のときはこの限りではない。」という点も，勘違いし易いポイントですので注意して置きましょう。

キ ⑤

与式 $\overline{\overrightarrow{V_G}'} = \cos\theta\,\overrightarrow{V_G}$ より，

$$\Delta K = M\{\overline{\overrightarrow{V_G}'}\cdot\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{V_G}\cdot\overrightarrow{v_C}\}$$

$$= M(\cos\theta - 1)\,\overrightarrow{V_G}\cdot\overrightarrow{v_C}$$

$$= M(\cos\theta - 1)(v_{Cx}V_{Gx} + v_{Cy}V_{Gy})$$

＜考察 3＞

文中で与えられた「$\overline{\overrightarrow{V_G}'} = \cos\theta\,\overrightarrow{V_G}$」について。

$\overrightarrow{V_G} = (V_{Gx},\ V_{Gy})$ より，$\overrightarrow{V_G}$ となす角度 θ の $\overrightarrow{V'_G}$ の成分は，回転行列から考えて，

$$\overrightarrow{V'_{G1}} = (V_{Gx}\cos\theta - V_{Gy}\sin\theta,\ V_{Gx}\sin\theta + V_{Gy}\cos\theta)$$

である。$\overrightarrow{V_G}$ となす角度 $-\theta$ の場合は，

$$\overrightarrow{V'_{G2}} = (V_{Gx}\cos\theta + V_{Gy}\sin\theta,\ -V_{Gx}\sin\theta + V_{Gy}\cos\theta)$$

となるので，平均を取ると，

$$\overline{\overrightarrow{V_G}'} = \frac{\overrightarrow{V'_{G1}} + \overrightarrow{V'_{G2}}}{2} = \cos\theta\,\overrightarrow{V_G}$$ となる。

ク ④

$\Delta K = M(\cos\theta - 1)\,\overrightarrow{V_G}\cdot\overrightarrow{v_C}$ の式に，

$$\overrightarrow{v_C} = \frac{M\vec{V} + m\vec{v}}{M+m},\quad \overrightarrow{V_G} = \frac{m(\vec{V} - \vec{v})}{M+m}$$

を代入して，

$$\Delta K = M(\cos\theta - 1)\,\frac{m(\vec{V} - \vec{v})}{M+m}\cdot\frac{M\vec{V} + m\vec{v}}{M+m}$$

$$= \frac{(\cos\theta - 1)Mm}{(M+m)^2}\{MV^2 + (m-M)\,\vec{V}\cdot\vec{v} - mv^2\}$$

$$= 2\,\frac{(\cos\theta - 1)Mm}{(M+m)^2} \times \left\{\frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}mv^2 + (m-M)\,\frac{1}{2}(v_xV_x + v_yV_y)\right\}$$

＜考察 4＞

問 4 の設問は以上で終了ですが，下に続く文章の「$\overline{v_xV_x + v_yV_y} = 0$」は納得できますでしょうか。考察 2，3 のときと同様に，$\vec{V}$ と $\vec{v}$ の成分を考えれば，$v_xV_x + v_yV_y$ と $(-v_x)V_x + (-v_y)V_y$ の平均値を求めるだけなので，容易に 0 であることが求まりますね。また，θ が $0^\circ \sim 180^\circ$ まで，ほぼ同じ頻度で起こるとするならば，$\overline{\cos\theta} = 0$ となります。

問 4 で与えられている式は，いずれも高校範囲の物理，数学の知識で考察可能です。また「重心から運動を見る」というのも，力学の重要な思考の一つです。最難関大の入試においては，今回のように結果が与えられるのではなく，導出することを要求される場合も十分に考えられます。受験生の皆さんは特にこの問 4 を熟読して，理解を深めておきましょう。

問 5

問 4 の最後の式より，

$\frac{1}{2}M\,\overline{V^2} > \frac{1}{2}m\,\overline{v^2}$ のときは $(\overline{\Delta K}) < 0$ で，粒子の運動エネルギー $\frac{1}{2}M\,\overline{V^2}$ は衝突の度に減少し，

$\frac{1}{2}M\,\overline{V^2} < \frac{1}{2}m\,\overline{v^2}$ のときは $(\overline{\Delta K}) > 0$ で，粒子の運動エネルギー $\frac{1}{2}M\,\overline{V^2}$ は衝突の度に増加する。

どちらにしても，$\frac{1}{2}M\,\overline{V^2}$ の値は $\frac{1}{2}m\,\overline{v^2}$ に近づいていき，等しくなった時点（$\frac{1}{2}M\,\overline{V^2} = \frac{1}{2}m\,\overline{v^2}$）で $(\overline{\Delta K}) = 0$ となり，それ以後は変化しなくなる。

＜考察５＞

問４，５の理論は，粒子と原子の衝突だけでなく，絶対温度の異なる２つの単原子分子理想気体の混合，いわゆる「熱平衡」の話にも応用する事ができます。

絶対温度は分子の平均運動エネルギーと比例しますので，異なる運動エネルギーの分子が，衝突を繰り返していると，運動エネルギーの平均値が等しい値に近づいていき，絶対温度も一様となる。

今回の問題は，普段「何となく納得」している熱平衡（エネルギー平衡）について，普段「無視している」分子の衝突から，導き出す事を最終目標にしています。

了

＜最後に＞

如何だったでしょうか。問題自体は与えられている式と誘導に従って計算していけば，それほど難問では無かったかも知れません。

今回この問題を紹介した理由は，問題自体より，誘導の裏に秘められた理論について，理解を深めてもらいたかったからです。特に問４で扱っているテーマには注意して下さい。

今回の衝突問題に限らず複数の物体を扱うときに，静止観測者から見ると複雑に見える運動を，「重心の運動」さらに「重心から見た個々の運動」に注目することで，簡単な運動に置き換える思考は，力学における重要なテーマの１つとして存在しています。

特に運動量が保存される運動系では「重心速度一定」となるので，上の考え方が重宝されます。一度，各自持っている問題集の「運動量」の章を読み返して，各問題の重心の運動に注目してみて下さい。新たな発見があるかも知れません。