強者の戦略

研伸館，物理講師の工藤です。強者の戦略 HP 物理ページ第２５回（問題編）第２６回（解答編）を担当します。今回は下記の東京大学の過去問題を通して“次元”の奥深さを伝えたく思います。それでは早速問題に入りましょう。

【問題】 次元について『出典：２００３年度　東京大学　後期試験　総合問題Ⅱ』（考察時間目安：２５分）

ニュートンの運動方程式は，以下のように表現される。

$f = ma$　　　①

式①は，「質量 m の物体に力 f が働くとき，その物体には加速度 a が生じ，加速度 a は力 f の方向に一致し，力 f の大きさに比例する」と説明される。

一般に，質量，力，加速度などの物理量には，単位がついている。例えば，長さの単位を [L]，時間の単位を [T]，質量の単位を [M] とし，力の単位を [F] と表そう。このとき，式①の質量 m の単位は [M]，加速度 a の単位は [$\mathrm{LT^{-2}}$]，となる。したがって，力 f の単位 [F] は，[$\mathrm{MLT^{-2}}$] のように表現される。

このように，式①の物理量は，４つの単位 ([L] [T] [M] および [F]) で表されているが，それらは互いに独立ではなく，いくつかの基本単位を選ぶと，その組合わせで表すことができる。

A

力学では，質量 [M]，長さ [L]，時間 [T] を基本単位として選ぶと，その他の速度，加速度，力などの物理量の単位は，実数 α，β，γ を用いて

[$\mathrm{M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}}$]　　②

の形で表現できる。この形式を次元とよぶ。このとき，面積の次元は [$\mathrm{L^2}$]，体積の次元は [$\mathrm{L^3}$]，速度の次元は [$\mathrm{LT^{-1}}$]，加速度の次元は [$\mathrm{LT^{-2}}$] および力の次元は [$\mathrm{MLT^{-2}}$] となる。

物理量の間の関係を，式①のように方程式を用いて表現した場合は，その方程式の中の各項 (式①の場合は左辺と右辺にあたる) の次元は，式②の形に表現されなければならない。また，その各項は等しい次元によって表現されなければならない。

(1)　万有引力の法則

$$f = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

を地表における質量 m_1 の物体に適用することにより，万有引力定数 G の値とその次元を求めなさい。ただし，下記の物理量は与えられているものとする。

R は地球の半径	6.38×10^{6} [m]
m_2 は地球の質量	5.97×10^{24} [kg]
地表における重力加速度 g	9.78　[$\mathrm{ms^{-2}}$]

次に，地球の重力の下にある質量 m の質点を，初速度 0 で落下させる場合を考えよう。ここでは物体には重力 mg が下向きに，t 秒後の質点の速度 $u=u(t)$ に比例する空気からの抵抗力 mku が上向きに働くものとする。ただし k は比例定数である。

(2) 運動方程式①を，落下速度 $u=u(t)$ を用いて表しなさい。

(3) 時間 t が十分大きくなったときの物体の落下速度は一定の u_∞ へ近づくことが知られている。これを終端速度と呼ぶ。この物体の終端速度 u_∞ を求めなさい。

(4) $t=0$ のとき $u(0)=0$ として，$u(t)$ を求めなさい。また，t と u の関係を示す概略図を描きなさい。ここで，下記の関係式を用いてもよい。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\log y$$

B

無限に広い領域に，一様な速度 u で流れている流体がある。この流れの中に半径 ω の球が置かれている。この球が流体から受ける力を f とする。

このような物理現象を支配する物理量は，球の半径 ω，流体の密度 ρ (ロー)，流体の粘性抵抗 μ (ミュー) および流れの速度 u である。ここで粘性抵抗 μ には $\tau=\mu\dfrac{u}{h}$ という関係式がある。ただし，τ (タウ) は応力とよばれ，単位面積あたりに働く力であり，h は長さの次元をもつ物理量である。

(5) 流体の密度 ρ，応力 τ および粘性抵抗 μ の次元を，質量 [M]，長さ [L] および時間 [T] を用いて表しなさい。

さて，一様な速度 μ で流れている流体中の半径 ω の球が流体から受ける力 f について考えよう。

(6) 流れの速度 u が十分に小さい場合には，この球が流体から受ける力 f は

$$f=C\,\omega^{\alpha}\,\mu^{\beta}\,u^{\gamma}$$

という形で表されることが知られている。このとき α，β，γ の値を求めなさい。ただし，比例定数 C は $C=6\pi$ であり，無次元である。

C

次に，半径 ω，密度 ρ_s の球を静かに密度 ρ の静止している液体中に落下させることを考える。ただし，$\rho_s>\rho$ とする。

(7)　この球には，浮力，重力および液体からの抵抗力が作用するものとする。また，この液体からの抵抗力は，設問 (6) によって求められた力により表現されるものと考える。このときの運動方程式①を，時刻 t における速度 $u=u(t)$ を用いて表しなさい。

(8)　この球の終端速度 u_{∞} を ω, ρ_s，μ, ρ および g を用いて表しなさい。