【解答解説】

A

(1)　地表付近の万有引力のことを重力と定義しているので

$$m_1 g = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

$$G = \frac{gR^2}{m_2}$$

$$G = \frac{9.78\times\left(6.38\times10^6\right)^2}{5.97\times10^{24}} = 6.67\times10^{-11}$$

$[\mathrm{m^3/kg\cdot s^2}]$

$$(G\text{ の次元}) = \frac{\left[\mathrm{LT^{-2}}\right]\times\left[\mathrm{L^2}\right]}{[\mathrm{M}]} = \left[\mathrm{M^{-1}L^3T^{-2}}\right]$$

(2)　$$m\frac{du(t)}{dt} = mg - mku(t)$$

(3)　$t\to\infty$ のとき，$u(t)\to u_\infty$ であり，$\dfrac{du_\infty}{dt} = 0$ であるから，(2) より

$$0 = mg - mku_\infty$$

よって，$u_\infty = \dfrac{g}{k}$

(4)　(2) より

$$\frac{du(t)}{dt} = g - ku(t)$$

であるから

$$\frac{1}{g-ku(t)}du(t) = 1dt$$

両辺を t に関して積分して

$$-\frac{1}{k}\log\{g-ku(t)\} = t + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

ここで初期条件，$t = 0$ のとき $u(0) = 0$ より

$$C = -\frac{1}{k}\log g \quad \text{なので}$$

$$-\frac{1}{k}\log\{g-ku(t)\} = t - \frac{1}{k}\log g$$

$$\Rightarrow\ \log\{g-ku(t)\} = -kt + \log g$$

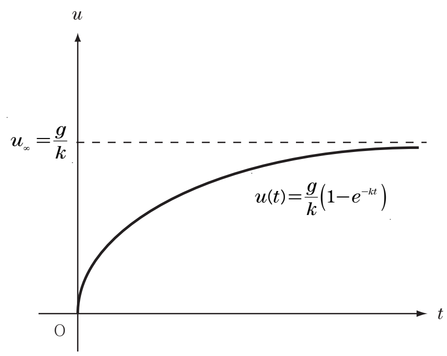
$$\Rightarrow\ \log\{g-ku(t)\} - \log g = -kt$$

$$\Rightarrow\ \log\left\{\frac{g-ku(t)}{g}\right\} = -kt$$

$$\Rightarrow\ \frac{g-ku(t)}{g} = e^{-kt}$$

$$\Rightarrow\ u(t) = \frac{g}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$$

また，t と u の関係は下図



B

(5)　$$(\rho\text{ の次元}) = \frac{[\mathrm{M}]}{\left[\mathrm{L^3}\right]} = \left[\mathrm{ML^{-3}}\right]$$

$$(\tau\text{ の次元}) = \frac{[\mathrm{F}]}{\left[\mathrm{L^2}\right]} = \frac{\left[\mathrm{MLT^{-2}}\right]}{\left[\mathrm{L^2}\right]} = \left[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\right]$$

また，$\tau = \mu\dfrac{u}{h}$ より

$$[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}] = (\mu\text{ の次元})\frac{\left[\mathrm{LT^{-1}}\right]}{[\mathrm{L}]}$$

であるから

$$(\mu\text{ の次元}) = [\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}]\times[\mathrm{T}] = [\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}]$$

(6)　$f = C\omega^\alpha\mu^\beta u^\gamma$ という形で表現されるとき，力 f の次元 $[\mathrm{MLT^{-2}}]$ は

$$[\mathrm{MLT^{-2}}] = [\mathrm{L}]^\alpha[\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}]^\beta[\mathrm{LT^{-1}}]^\gamma = [\mathrm{M}^\beta\mathrm{L}^{(\alpha-\beta+\gamma)}\mathrm{T}^{-(\beta+\gamma)}]$$

と変形できるので，指数を比較して

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha - \beta + \gamma = 1 \\ -(\beta + \gamma) = -2 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

C

(7)　浮力は $\frac{4}{3}\pi\rho\omega^3 g$ ，重力は $\frac{4}{3}\pi\rho_s\omega^3 g$ ，また，速度 $u(t)$ で運動している球に働く液体からの抵抗力は (6) より $6\pi\omega\mu u(t)$ であるから，この球の運動方程式は

$$\frac{4}{3}\pi\rho_s\omega^3 \frac{du(t)}{dt} = \frac{4}{3}\pi\rho_s\omega^3 g - \frac{4}{3}\pi\rho\omega^3 g - 6\pi\omega\mu u(t)$$

(8)　球の速度が終端速度 u_∞ になった時 $\frac{du_\infty}{dt} = 0$ なので (7) より

$$\frac{4}{3}\pi\rho_s\omega^3 \times 0 = \frac{4}{3}\pi\rho_s\omega^3 g - \frac{4}{3}\pi\rho\omega^3 g - 6\pi\omega\mu u_\infty$$

$$\Rightarrow \quad u_\infty = \frac{2\omega^2(\rho_s - \rho)g}{9\mu}$$

解答は以上です。

＜考察＞

微分方程式を解くことができたなら，問題自体は易しかったでしょう。それではここから“次元”の考察に移ります。まず，次元の定義から入りましょう。次元の定義は「１点の位置をを決めるのに必要な数値の個数」です。

具体的には，大きさを持たない「点」の中では位置の決めようがないので点は０次元です。

「直線」では基準となる点を決めておき，そこからの距離に相当する１個の数（例えば x ＝５）をあたえれば１点の位置が決定する。したがって直線は１次元です。

「面」では面上の１点を決めるのに，（x, y）＝（４，３）と２個の数値を与えるとその点の位置が決定するので，面は２次元です。（球の表面も２次元である。なぜなら，例えば地球の表面上のある位置は緯度と経度の２個の数値で決定するからです。）

同様にして，体積をもつ立体は３次元であると言えます。

以上，このように次元は決定されます。そして１次元の“直線”の区切り方として様々な“単位”が存在します。例えばある直線の長さの区切り方でも「１m」ずつ区切ったり１mを１００分割し「１cm」ずつ区切ったり，さらにそれを１０分割して「１mm」ずつ区切ったりすることができます。同じように質量の直線軸の区切り方でも「１kg」ずつ区切ったり，それを１０００分割して「１g」ずつ区切ったり，さらに１０００分割して「１mg」ずつ区切れます。このように直線の区切り方だけでも色々あり，その区切り方のことを“単位”と呼びます。

ただ上のような区切り方は地球上の人間達がそのように区切っているだけなので，他の惑星の人？生物？とにかく言葉が通じなくとも意思疎通できる存在に，例えば「この棒の長さは３m ３０cm」と伝えても「何それ？メートルとかセンチメートルって何？」となる（人間以外の存在が長さを人間と同じように区切っているとは限りませんから。）ことを念頭に置いておいて下さい。

さて，そろそろ本題に入りたいと思います。出題問題は流体中の物体の運動についての内容でした。問題文中に与えられている物理量で

流体の粘性抵抗 μ $[ML^{-1}T^{-1}]$

流体の速度 u $[LT^{-1}]$

流体の密度 $\rho[ML^{-3}]$

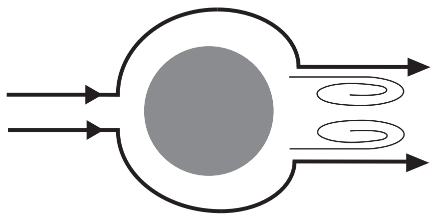
流体中の物体の半径 $\omega[L]$

がありました。これらの物理量を組み合わせると

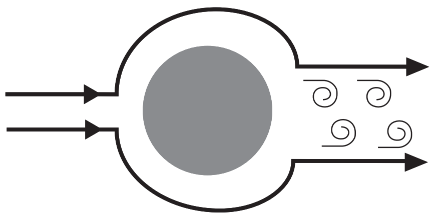
$$R=\frac{\rho\omega u}{\mu} \qquad ・・・①$$

という単位のない物理量（これを無次元量と呼ぶ）が作られます。この無次元量$\boldsymbol{R}$をレイノルズ数と呼びます。この量が一体何なのかと言うと，実は流体中の球体や棒の後方には「カルマン渦」と呼ばれる渦ができています。(コーヒーに入れたミルクを掻き混ぜたときにできる渦もカルマン渦です。)

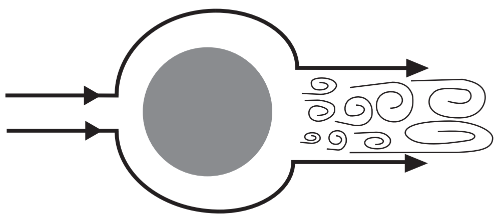
そしてそのカルマン渦の出来具合（渦の様子）がこのレイノルズ数の値で把握できます。レイノルズ数の値によって出来るカルマン渦は以下のようになります。



レイノルズ数約 50 以下



レイノルズ数約 60 以上



レイノルズ数約 1500

このように渦の様子が把握できて何が嬉しいのかと言うと，飛行機が空中を飛行している時や架橋周辺で風が吹いているとき，飛行機や架橋の後方にはカルマン渦が発生しており，建造物は渦の振動の影響を受けます。飛行機や架橋の設計ではこのような渦の影響を考慮する必要がありますが，機体や橋を造りながら，もしくは造ってから渦の影響が少なくなるよう修正していくのはナンセンスです。そこでこのレイノルズ数が活躍します。①式より建造物の実物大の模型を用意しなくてもミニチュアサイズの模型（①式の$\boldsymbol{\omega}$の値は小さい）を用意し周りの流体の速度を大きく調整すればレイノルズ数は一致，つまり渦の様子は変わりません。これを利用すると，物体の周りの流体の物理量を巧く調整することで実物大の建造物を造らなくてもミニチュアサイズの模型を用いた実験で，建造前にあらかじめ渦の影響を把握することができます。このようにして，活躍する無次元数としてレイノルズ数という量があるのです。

そして，このレイノルズ数$\boldsymbol{R}$は無次元量であるので，地球上で人間が$\boldsymbol{R}$＝２００の時に測定した渦の様子と，異なる惑星の生物が彼らにとってのレイノルズ数$\boldsymbol{R}$が$\boldsymbol{R}$＝２００の時に測定した渦の様子は全く同じになります。つまり言葉は通じなくてもレイノルズ数が同じ時の渦の出来具合は共通認識できるということですね。

以上です。

＜追記＞

１９４０年にアメリカ合衆国ワシントン州タコマ市でカルマン渦の影響を無視して（当時はカルマン渦の存在が知られていなっかた）設計した“ナローズ橋”が崩壊した出来事があります。橋がカルマン渦の影響で激しく振動し，ねじれている様子が，動画サイトにアップロードされているかもしれないので興味のあるかたはそちらも見てみて下さい。