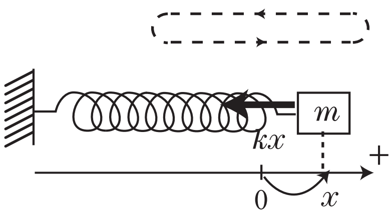
強者の戦略

第２９回に引き続き，藤原です。第３０回目は第２９回目で紹介した問題の解説です。模範解答だけでなく，＜理論確認＞や＜考察＞の部分では，入試における最重要事項の確認や，少し踏み込んだ話に触れております。今回の問題は，最終的には波動現象「定常波」に繋がる話なのですが，導出過程で用いられる力学的思考は，複数の物体の運動を扱う上で，非常に重要な思考法となります。単なる参考問題としてではなく，せっかくですから是非学習して，入試本番までに身に着けてもらいたいと思います。

【解答解説】

図１において，変位 x と逆向きに大きさ（絶対値）



kx の弾性力が働く。よって運動方程式は

$$ma = -kx$$

$\boxed{1}$

（注：変位 $x>0$ のとき（伸びているとき），弾性力 $-kx<0$。変位 $x<0$ のとき（縮んでいるとき），弾性力 $-kx>0$ 。よって上の式で，伸びているときと，縮んでいるときのどちらの場合の力も表している。）

上の運動方程式を変形して $a=-\dfrac{k}{m}x$，これを単振動の条件式 $a=-\omega^2 x$ と比較して，x の変化は角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動。

$\boxed{2}$

＜理論確認：単振動とは＞

「単振動とはどんな運動か？」分かっているようで曖昧な人もいるかと思われますので，確認しましょう。

ある時刻 t における変位 x が，

$$x = A\cos(\omega t+\phi)$$

と表される「単振動」において，速度 v，加速度 a は定義式から考えて，次の様に変化しながら運動します。

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\phi)$$

$$x=\frac{dv}{dt}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\phi)$$

$$\Rightarrow\quad a=-\omega^2 x$$

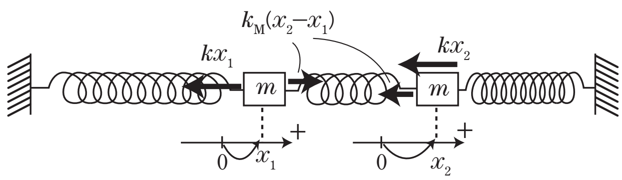
逆に，変位 x と加速度 a の変化が常に

$$a=-(\text{定数})x \quad \cdots（※）$$

の関係を満たしながら運動する場合，その運動は単振動で運動する（$\Rightarrow x=A\cos(\omega t+\phi)$）ことも証明されています。弾性力によって速度変化する１物体の運動は，その最も代表的な例です。

ただし弾性力があっても，必ずしも単振動をする訳ではありません。その例を扱っているのが以下の設問です。

図２において，中心のばねが伸びている場合を仮定すると，その伸びは x_2-x_1 であり，中心のばねは，左右のおもりにそれぞれ引く力を与える。よって，左右のおもりの運動方程式は



（左）$ma_1=-kx_1+k_M(x_2-x_1)$ …①

$\boxed{3}$

（右）$ma_2=-k_M(x_2-x_1)-kx_2$ …②

$\boxed{4}$

（注：$x_2-x_1<0$ のとき，中心のばねは縮んでおり，左右のおもりに押す力を与えるが，その場合でも運動方程式は上記と同じ式になる。）

＜考察１：単振動の条件＞

上記の式①，②は，まだこの段階では

$$a_1=-(\text{定数})x_1,\quad a_2=-(\text{定数})x_2$$

と変形できるかどうかがわかりません。よって，この２つのおもりが単振動するのかどうかは，まだ未知です。「弾性力があれば単振動」という理解の仕方は誤っており，単振動の条件は，ある物体の加速度と変位が，（※）の様な条件式を満たしているかどうかで決まります。

加速度の定義より，$a_X=a_1+a_2$，$a_Y=a_1-a_2$,

①＋②より

$$m(a_1+a_2)=-k(x_1+x_2)$$

$\Leftrightarrow\quad ma_X=-kX\quad\cdots$③

$\boxed{5}$

①－②より

$$m(a_1-a_2)=-k(x_1-x_2)-2k_{\mathrm{M}}(x_1-x_2)$$

$\Leftrightarrow\quad ma_Y=-(k+2k_{\mathrm{M}})Y\quad\cdots$④

$\boxed{6}$

＜考察２：変位，速度，加速度の定義＞

受験生にとって，今回の問題の出来・不出来を決めるのは $\boxed{5}$，$\boxed{6}$ の部分だと思います。

与えられた「変位の関係式」から「加速度の関係式」を導き出すことができたかどうかで，大きく点差がついたと予想されます。

誘導が少なく，若干受験生を突き放した感じの問題文です。ただしアンフェアではありません。速度と加速度の定義をどれだけ丁寧に理解しているかが問われます。

$X=x_1+x_2$ ←この与式の x_1，x_2 には，t の関数が入ります。よって，X も t の関数です，この式の両辺を t で微分して，「変位」の時間変化率を求めたものが「速度」であり，さらに両辺を t で微分して「速度」の時間変化率を求めたものが「加速度」となります。よって，

$$\frac{d^2X}{dt^2}=\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{d^2x_2}{dt^2}\quad\Leftrightarrow\quad a_X=a_1+a_2$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2}=\frac{d^2y_1}{dt^2}-\frac{d^2y_2}{dt^2}\quad\Leftrightarrow\quad a_Y=a_1-a_2$$

上の式③を変形して $a_X=-\dfrac{k}{m}X$,

これを単振動の条件式と比較して，X の変化は角振動数 $\omega_X=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動。

$\boxed{7}$

上の式④を変形して $a_Y=-\dfrac{k+2k_{\mathrm{M}}}{m}Y$,

これを単振動の条件式と比較して，Y の変化は角振動数 $\omega_Y=\sqrt{\dfrac{k+2k_{\mathrm{M}}}{m}}$ の単振動。

$\boxed{8}$

＜考察３：重心運動と相対運動＞

$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ の部分をクリアできた人は，その後の誘導に従って，

$$a_X=-(\text{定数})X,\quad a_Y=-(\text{定数})Y$$

まで導かれたかと思います。これは X，Y の変化が単振動であることを導いていますが，そもそも X，Y はどのような運動に注目しているのでしょうか。

実は今回の誘導は強引な展開ではなく，物理学において良く用いられる思考法に基づいて誘導されてます。本問に限らず複雑な２物体の運動を解析するときに，個々の運動を考えるより先に**重心運動**と**相対運動**を解析してみる手法があります。

重心運動

２物体の重心の変位を x_G，加速度を a_G とすると，

$$x_G = \frac{mx_1 + mx_2}{m+m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

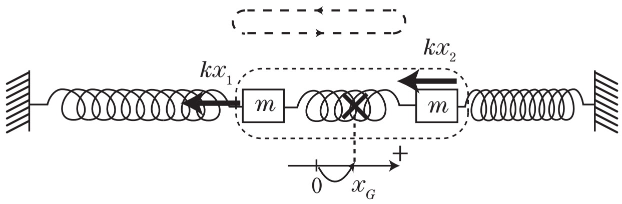
両辺を時刻 t で微分して

$$a_G = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

① ＋② より，重心の方程式は，

$$2ma_G = -k(x_1 + x_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ma_G = -2kx_G$$



この式から分かるように，2つのおもりに互いに逆向き・同じ大きさで与えられていた中央のばねからの力は，２つのおもりを１つの物体と見なした場合に“内力”の扱いとなり，全体の重心運動には無関係となります。重心運動は，外部から与えられる２つのばねからの力で決定され，それは重心の変位 x_G 対して逆向きに，x_G に比例した大きさで与えられるので，重心はきれいに単振動を行います。

（注：本問は重心運動をそのまま利用せず，重心の２倍の変位・加速度で動く運動 X を考えています。ただし単振動を行う点に違いはありません）。

相対運動

右のおもりから見た,左のおもりの相対的な変位（両方のおもりが共につり合いの位置にいるときを 0 とする）を x_R，加速度を a_R とすると，

$$x_R = x_1 - x_2$$

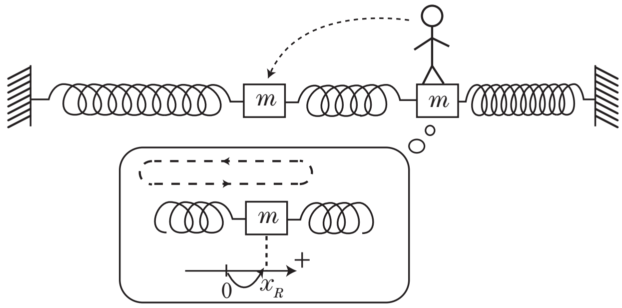
両辺を時刻 t で微分して

$$a_R = a_1 - a_2$$

① －② より，右のおもりから見た左のおもりの運動方程式は，

$$ma_R = -kx_R - 2k_{\mathrm{M}}x_R$$

$$\Leftrightarrow \quad ma_R = -(k + 2k_{\mathrm{M}})x_R$$



条件を満たしているので，右のおもりから見た左のおもりの運動もきれいに単振動に見えることがわかります。

（注：本問の運動 Y は，相対運動を表しています）

（参考：慣性力を用いて相対の運動方程式を表すと，

$$ma_R = -kx_1 - k_{\mathrm{M}}x_R - ma_2$$

② を用いて a_2 を消去すれば，同様の式になります）

与えられている外力にもよりますが，個々の運動は複雑でも,「重心」と「相対」運動は規則的な運動を行っている場合が多く，まずそれらの運動を求めてから，その後に「個々の運動」を分析していく，といった考え方が，本問の根底にある思考法です。

時刻 t に対する X，Y の変化

$$X = A_X\cos(\omega_X t + \phi_X) \quad \cdots ⑤$$

$$Y = A_Y\cos(\omega_Y t + \phi_Y) \quad \cdots ⑥$$

を用いて，時刻 t に対する

$x_1 = \dfrac{X+Y}{2}$，$x_2 = \dfrac{X-Y}{2}$ の変化を考える。

(⑤ ＋⑥) ÷ 2 より

$$x_1 = \frac{1}{2}\{A_X\cos(\omega_X t + \phi_X) + A_Y\cos(\omega_Y t + \phi_Y)\} \quad \cdots ⑦$$

(⑤ －⑥) ÷ 2 より

$$x_2 = \frac{1}{2}\{A_X\cos(\omega_X t + \phi_X) - A_Y\cos(\omega_Y t + \phi_Y)\} \quad \cdots ⑧$$

$A_X \neq 0$，$A_Y = 0$ の場合，⑦，⑧ より

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}A_X\cos(\omega_X t + \phi_X)$$

となり, 2つのおもりは常に等しい変位で動く。よって, x_1 の変位の向きが（→）のとき, x_2 の変位の向きも（→）である。

$\boxed{9}$

$A_X = 0$, $A_Y \neq 0$ の場合, ⑦, ⑧より

$$x_1 = \frac{1}{2}A_Y\cos(\omega_Y t + \phi_Y)$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}A_Y\cos(\omega_Y t + \phi_Y)$$

となり, 2つのおもりは常に逆の変位で動く。よって, x_1 の変位の向きが（→）のとき, x_2 の変位の向きは（←）である。

$\boxed{10}$

$A_X \neq 0$, $A_Y \neq 0$ の場合, ⑦, ⑧より x_1, x_2 の振動は単振動ではなく, 振幅（x_1, x_2 を時刻 t に対する関数と見なした場合の極大・極小値の大きさ）は一定にならない。このような現象をうなりと呼ぶ。

$\boxed{11}$

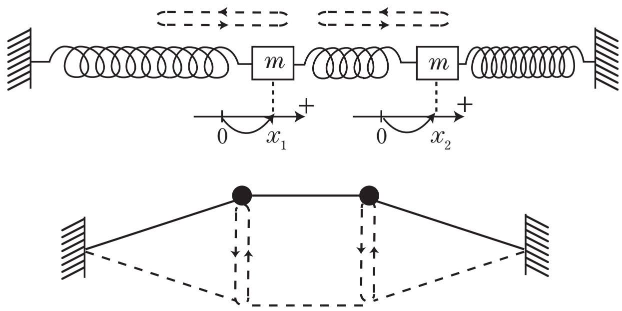
＜考察4：固有振動とうなり＞

$\boxed{9}$, $\boxed{10}$ の振動を発生させるには, 初期条件（出発のさせ方）が重要になります。

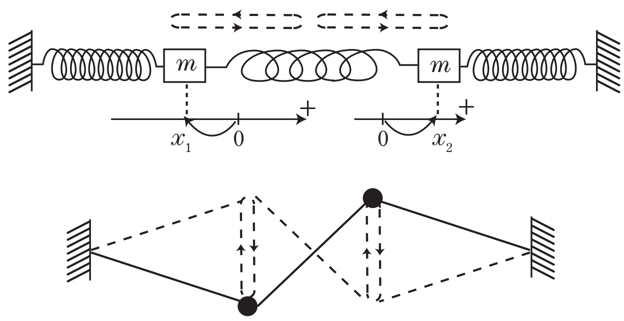
例えば, 2つのおもりを共に同じ変位ずらした状態から静かに放した場合などは $\boxed{9}$ の振動になり, その周期は $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_X} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ となります。一方, 正負逆の変位から静かに放した場合などは $\boxed{10}$ の振動になり, その周期は $T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_Y} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k+2k_M}}$ となります。

また, これらの $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ の振動を, 軸と垂直な方向の振動に置き換えて考えると, 以下の図の様になります。

$\boxed{9}$



$\boxed{10}$



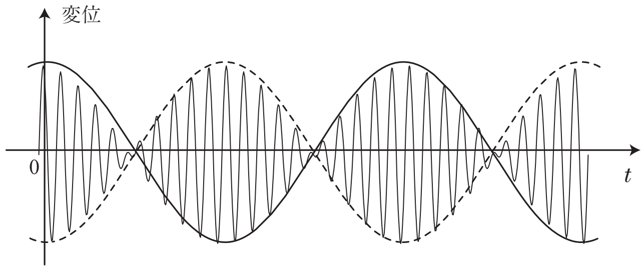
弦の定常波に類似しており, 図 $\boxed{9}$ は基本振動, 図 $\boxed{10}$ は2倍振動に似ています（ただし似ているだけで, 実際に基本・2倍振動と呼ぶわけではありません）。

今回のモデルでは, おもりにこれら以外の単振動（振幅・周期一定の往復運動）を発生させることは出来ません。ばね振動にしろ, 張力による弦の振動にしろ, ある長さ・質量が与えられた系において, そこで発生させることができる単振動の種類は限られており, その周期・振動数も限られた固有値しか取ることができません。

系によってそれぞれ固有に定まっている, その周期・振動数のことを「固有周期・固有振動数」と呼びます。

最後の $A_X \neq 0$, $A_Y \neq 0$ の場合は, 2つのおもりは振幅・周期が一定の往復運動ではありません。横軸を時刻として, 振動の変位の変化は下のグラフの様になります。「うなり」とは音波だけの現象を指すのではなく, このように振幅が時間によって変化

する現象を一般的に指します。



了

＜最後に＞

力学入試問題として考えると，**(1) 変位・速度・加速度の関係は厳密に理解しておくべき。(2) 重心や相対に注目した運動の眺め方にも慣れておくべき。**という２点は実感されたと思われます。

一方で，曖昧なイメージしかなかった「固有振動数・うなり」に関しても，力学的導出から数値の意味が理解出来たと思います。

医学部を目指す強者の中には，「学習の効率性」を重視し過ぎてしまい，日々の学習において「そこまで深い物理の理解は必要か？」と感じてしまう人もいたりします。

ただし，暗記項目が少ない科目であるが故に，目指す学部は関係なく，物理問題では「ひらめきではなく理解の深度」が何より要求される事であると知っておいて下さい。医学部受験者向けに作られた本問でもそうなのです。

模範解答に「疑問」を持つこと。自分の解答を「批評」してみること，その２点が物理理解を深める為の王道です。是非実践していって下さい。