強者の戦略

第 43 回の解答編です。さっそく解答解説に移りましょう。

問 1

原点 O から A に向けて出た光について，

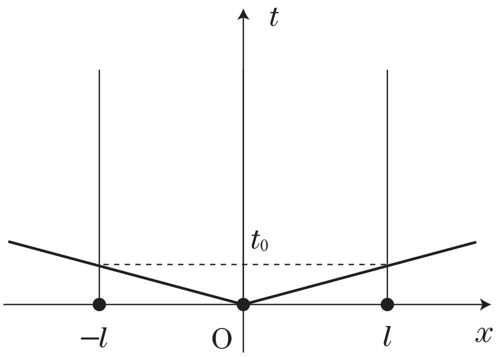
$$x=-ct \qquad \therefore \ \ t=-\frac{1}{c}x$$

また，原点 O から C に向けて出た光について，

$$x=ct \qquad \therefore \ \ t=\frac{1}{c}x$$

これらを x–t 図に描くと下図の通り。

（なお，$t_0=\dfrac{l}{c}$）



問 2

時刻 t における A，B，C の x 座標をそれぞれ x_A，x_B，x_C，とする。等速直線運動の式より，

$$x_A=Vt-l \qquad \therefore \ \ t=\frac{1}{V}x_A+\frac{l}{V}$$

$$x_B=Vt \qquad \therefore \ \ t=\frac{1}{V}x_B$$

$$x_C=Vt+l \qquad \therefore \ \ t=\frac{1}{V}x_C-\frac{l}{V}$$

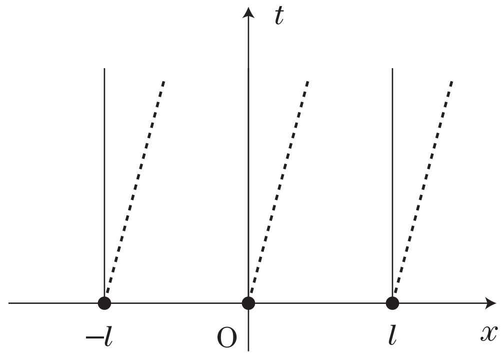
これらを x–t 図に描くと右上図の通り。

問 3

題意より，

$$ct_1+Vt_1=l \qquad \therefore \ \ t_1=\frac{l}{c+V}$$

$$ct_2-Vt_2=l \qquad \therefore \ \ t_2=\frac{l}{c-V}$$



問 4

B の軌跡について，

K 座標系：$x=Vt$

K′ 座標系：$x'=0$

これらを (1) 式に代入して，

$$0=a\times Vt+bt \ \ \rightarrow \ \ (aV+b)t=0$$

$t>0$ の任意の t について成立するので，

$$aV+b=0 \qquad \therefore \ \ b=-aV$$

問 5

(1) より，

$$t_1'=pt_1+qx_1$$

$$t_2'=pt_2+qx_2$$

問 2 より，

$$x_1=Vt_1-l$$

$$x_2=Vt_2+l$$

問 3 より，

$$t_1=\frac{l}{c+V}$$

$$t_2=\frac{l}{c-V}$$

光速度不変の原理より，

$$t_1'=t_2'$$

以上 7 式より x_1，x_2，t_1，t_2，t_1'，t_2' を消去して p と q の関係を求めると，

$$q=-\frac{V}{c^2}p$$

問 6

(1) より，

$$x_2'=ax_2+bt_2$$

$$t_2' = pt_2 + qx_2$$

問 1 より，

$$x_2 = ct_2$$

問 3 より，

$$t_2 = \frac{l}{c-V}$$

問 4，問 5 より，

$$b = -aV$$

$$q = -\frac{V}{c^2}p$$

光速度不変の原理より，

$$x_2' = ct_2'$$

以上 7 式より x_2，t_2，x_2'，t_2'，b，q を消去して a と p の関係を求めると，

$$p = a$$

問 7

K' 座標系から K 座標系を見ると，速度 $-V$ で運動しているように見える。よって，(1) 式において，x と x' および t と t' を入れ替え，V を $-V$ に置き換えることにより，x と t をそれぞれ x'，t' で表すことができる。問 4 から問 6 までの結果も用いて，

$$x = ax' + \left\{-a(-V)\right\}t' = a(x' + Vt')$$

$$t = at' + \left\{-\frac{(-V)}{c^2}a\right\}x' = a\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)$$

これらをもとの (1) 式に代入して，

$$x' = a\left\{a(x' + Vt')\right\} - aV\left\{a\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)\right\}$$

$$= a^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)x'$$

すべての x' で成立するとき，

$$a^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1 \qquad \therefore \quad a = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

ここで，$V = 0$ のとき，$x' = x$，$t' = t$ にならなければならないので $a > 0$ である。

よって，

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

いかがだったでしょうか。

第 35 回の問題に挑戦し，第 36 回の解答解説を一読した人にとっては，この問題は多少取り組みやすかったかも知れませんね。特殊相対性理論では，**「静止している観測者と運動している観測者とでは，時間の進み方が異なる」**ということが重要なポイントでした。本問でも，静止系（K 座標系）とそれに対して速度 V で運動する系（K' 座標系）を考え，それぞれの系の時刻を t，t' と異なるものとして扱っていました。上記の事実を知っている人にとっては，「ふん，ふん，そうだね」と思いながら読み進めていける部分です。

（もちろん，知らなくても，**「文章通りに受け止めておいて，それを信じて（言い換えれば与えられた理論・公式を用いて）解いていく」**（第 36 回参照）の精神で解いていけば問題ありません。）

しかしながら，本問については，さらに踏み込んだ議論を展開していたことが読み取れたでしょう。問題文の最後にある通り，「時間と空間が混ざること」です。

今回は，このことについて簡単に解説を加えましょう。

《ローレンツ変換》

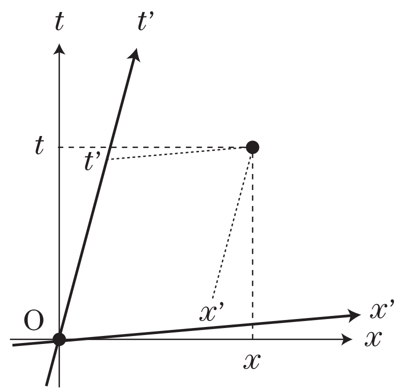
本問では x–t 図なるグラフが導入されていますが，この x–t 図について，以下の記載が問 3 から問 4 の間の誘導文中にあります。

「K' 座標系で B は静止している。つまり，任意の時刻 t' に対して，B の x' 座標は $x' = 0$ である。このことは，問 2 で描いた B の軌跡が K' 座標系での t' 軸になっていることを意味する。」

「光は $t' = t_1' = t_2'$ に同時に A と C に到達したのだから，A_1 と C_1 を通る線は K' 座標系における同時刻の線 $t' = t_1' = t_2'$ に対応していることになる。よって，

x–t 図で原点を通り A_1C_1 に平行な線が K' 座標系での x' 軸になっている。」

文章がわかりにくかも知れませんが，要は K' 座標系の t' 軸はすべての t' において $x'=0$ を満たす直線であるべきだ，という主張が 1 つめの文章で，また，K' 座標系の x' 軸はすべての x' において $t'=0$ を満たす直線であるべきだ，そしてそれは $t'=0$ という同時刻を結ぶ直線であるから，A_1 と C_1 を結ぶ直線（同時刻 $t'=t_1'=t_2'$ の直線）と平行であるべきだ，ということを言っているだけですね。
これらを K 座標系に重ねる形で描けば以下の通りです。



上図が想像できれば (1) 式が理解できるでしょう。すなわち，(x, t) と (x', t') は線形変換である (1) の形で描けるはずである，すなわち，x' や t' は x と t の 1 次関数で表されるはずであるから，もしかしたら変換に際して座標（空間）に時刻の影響が，時刻に座標（空間）の影響が入って来るかも知れないですね，と言っているわけですね。

さて，本問は，問 4 以降で係数 a, b, p, q を求めさせ，実際の変換公式を求めさせています。その結果を代入すると以下の通りです。

$$x'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(x-Vt\right)$$

$$t'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t-\frac{V}{c^2}x\right)$$

この変換公式をローレンツ変換といいます。K 座標系から K' 座標系に変換する際には，確かに座標（空間）と時刻の両方が混ざっていることがわかりますね。このように，元来空間と時間は互いに独立して存在するものではなく，互いに密接な関わりを持った不可分のものであることがわかります。x–t 図のような，空間座標と時間座標を合わせた座標空間を「時空」といいます。時空，と聞くとなんだか SF の世界の言葉のようですが，れっきとした物理用語であるのです。

なお，我々が日常生活で体験する程度の運動では，V は c に比べて非常に小さいため，$\dfrac{V}{c}$ はほぼ 0 と考えてよいでしょう。この近似のもとでは，ローレンツ変換は，

$$x'=x-Vt$$
$$t'=t$$

となります。これをガリレイ変換といいます。特に時刻について，座標系の時刻はその運動によらず等しいことが見てとれます。時間の（物理的な）進み方は誰しも平等である，と感じるのは，ある意味でこの近似が成り立つおかげです。言い方を変えれば，この近似の成り立たない高速の世界では，ローレンツ変換こそが正確な表現であり，時間と空間が混ざることになる，ということです。

今回はここまでにしましょう。またお会いできる日まで。