強者の戦略

研伸館の藤原です。強者の戦略 HP 物理ページ第４５回（問題編），第４６回（解答編）を担当させてもらいます。

この原稿は２０１４年の夏に書いています。今年上半期で最も興味深いニュースは「STAP 細胞」でした。

「STAP 細胞はあります」

というコメントは，響きの良さからかテレビや雑誌，ネットなどで結構取り上げられていて，今年の流行語になるかも知れません。

ある法則や現象が「ある」または「ない」という事を他の人に納得させる事はなんて難しいんだろう，とニュースを見ながら哲学的に感じたりします。理科の諸法則の検証は「理論」と「実験」の両面からなされますが，素人ながら調べてみると「STAP 細胞の存在」は従来の生物学の体系とは少し異なる理論体系から来た概念で，理論的に納得している人は少数派の様です。だからこそ「発見された」という実験報告は，生物史に残る大発見と讃えられましたし，その実験データの齟齬に関しては，徹底的な追求を受ける騒ぎになったのだと思います。

困難な道だからこそ，逆に新しい概念，存在を認めさせた偉人はすばらしいなぁと感じます。特に電磁気分野の目に見えないものについて，

「電場，磁場はあります」

という事を納得させた偉人はとてつもないな，と考えたりします（ガウス，マクスウェル，ファラデー，ウェーバー……，一人の功績ではありませんね）。

今回の掲載問題は電磁気分野の創作問題です。多くの高３にとって夏は電磁気をつめていく時期だと思いますが，その分野について「教科書や問題集などでは，自明にしていること」を確認したいと思います。

結果として物理よりもかなり数学的な問題になってしまいました（東大後期の総合科目Ⅱなどでは、このような出題がありえるかもしれません）。誘導文を読んでいけば、私が何を確かめようとしているか理解してもらえると思います。挑戦してみて下さい。

【問題】球殻上の電荷　『創作問題』（考察時間：６０分）

以下の文章の空欄を埋め、下の【問】に答えよ。

半径 R の球面を持つ金属殻が，ある空間内に固定されている。球殻の厚さは非常に小さく無視できるものとし，球殻の内部は空洞であるとする。この球殻上に正の電荷を一様に分布させたとして，その合計の電気量を Q とすると単位面積当たりの電気量 ρ は $\rho = \boxed{\quad 1 \quad}$ となる。

球殻の中心点を O とし，球殻内で任意に選んだ１点を P とする。点 O を原点として O → P 方向に z 軸をとる。さらに原点が一致し，3 軸が互いに垂直になるように x 軸，y 軸をとる。球殻上の各点の位置は，図１のように z 軸とのなす角 θ と，xy 平面上の角 ϕ で表すものとする（球面と z 軸が交わる点はのぞく）。また点 P の z 座標を z_1 ($0 \leqq z_1 < R$) とする。

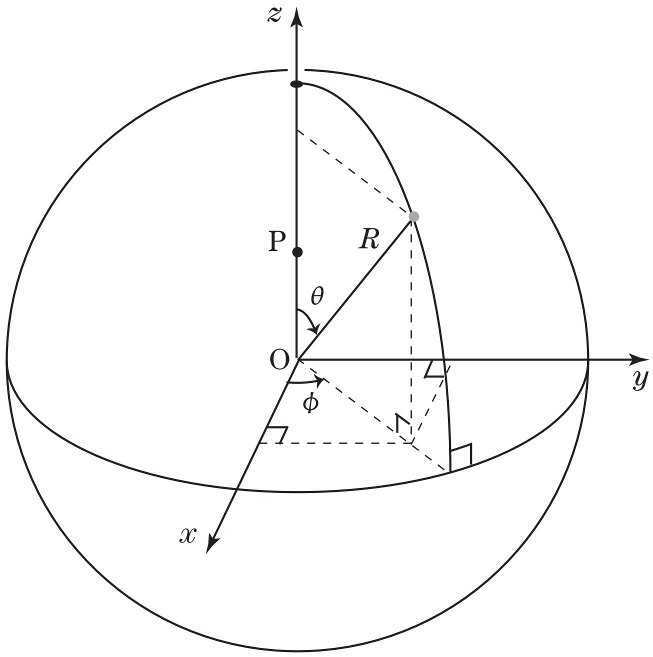

図　1

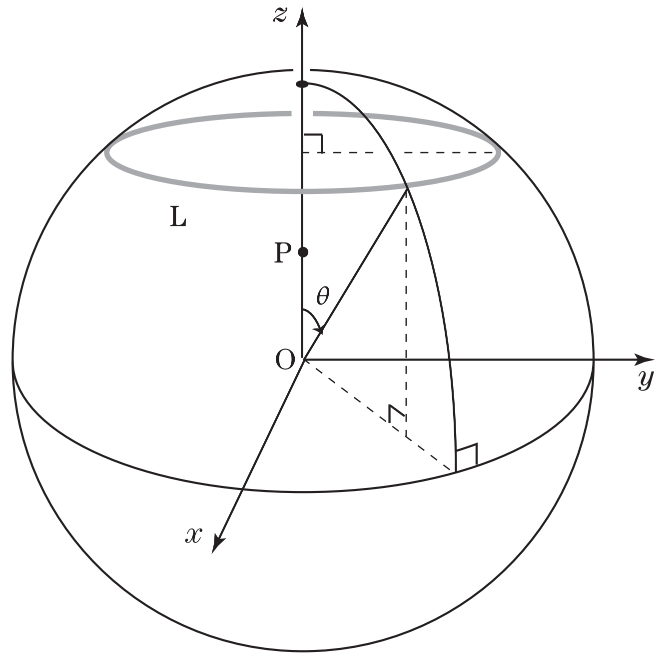

図　2

球殻上の $\theta \sim \theta + \Delta\theta$，$\phi \sim \phi + \Delta\phi$ の範囲内に含まれる電荷について考える。$\Delta\theta$，$\Delta\phi$ が微小のとき，この部分はほぼ平面と見なしてよく，その面積 s は $s = \boxed{\ 2\ }$ となり，含まれる電気量は ρs である。この微小範囲の電荷を点電荷とみなしてクーロンの比例定数を k とすると，この電荷が点 P に発する電場の大きさ E は，ρs を用いてよいものとすると $E = \boxed{\ 3\ }$ である。次に球殻上の全電荷が点 P に発する電場の和を考える。まず z 成分を考えると，先に求めた電場の z 成分は，s は用いずに表すと

$$-\boxed{\ 4\ } \times \Delta\phi\Delta\theta \qquad \cdots\cdots(1)$$

と書ける。図 2 の様に球殻のある θ 上の実線部分 L の電荷が，点 P に発する電場の z 成分の和は，(1) の $\Delta\phi$ が限りなく 0 に近い状態を考えて，

$$\text{定積分} \quad \int_0^{2\pi} \left(-\boxed{\ 4\ } \times \Delta\theta\right) d\phi$$

から求める事が出来る。その値は

$$-\boxed{\ 5\ } \times \Delta\theta \qquad \cdots\cdots(2)$$

となる。さらに球殻上の全電荷が，点 P に発する電場の z 成分の和は，(2) の $\Delta\theta$ が限りなく 0 に近い状態を考えて，

$$\text{定積分} \quad \int_0^{\pi} \left(-\boxed{\ 5\ }\right) d\theta$$

から求める事が出来る。その値は

$$\boxed{\ 6\ }$$

となる。

一方で，電場の x 成分，y 成分に関しても上記の様な手法で積分計算すれば和を求めること可能だが，積分を用いずとも簡易にその和を考えることができる。
例えば線 L 上の，z 軸に対称な 2 点 A，B からの P への電場は，図 3 の様に z 軸に対して対照に発生するので，L 上の電荷が P に発する電場の z 軸に垂直な成分の和が $\boxed{\ 7\ }$ になることは明らかであり，球殻上の全電荷が P に発する電場の z 軸に垂直な成分の和も同様である。

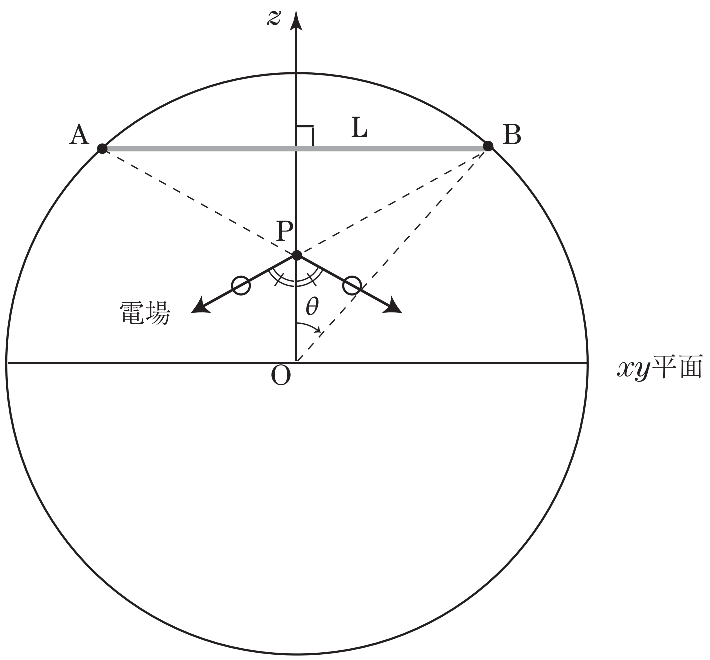

図　3

以上から，球殻内は位置によらず全ての点で，同様の電場状況になっている事が分かる。

【問】

上記において，球殻の外部の点の電場を求めたい。座標 z_2（$z_2 > R$）となる点 Q に対して，球殻上の全電荷が発する電場の z 成分の和を求めよ。