強者の戦略

第４５回に引き続き，藤原です。第４６回目は第４５回で紹介した問題の解説です。

今回の問題について，結論は知っている人も多いかもしれません。

一様に帯電した球殻内の電場は， 全ての点において大きさ 0。

ただ本当にその様にみなして良いかどうかの確認は，高校物理では省略されています。

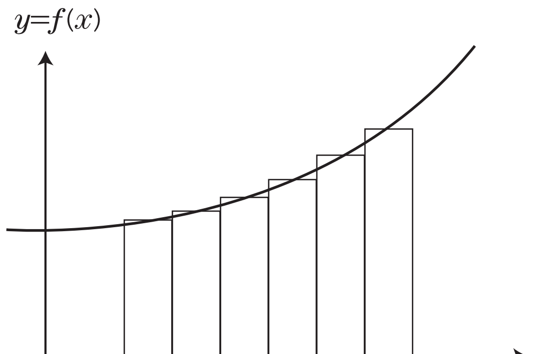
もちろん入試本番では制限時間がありますので，細かく導出している時間はありません。本番では結論を自明とすることが要求されます。しかしこのページでは理解を深める為に，敢えて普段の授業では説明に時間を割けていない，高校範囲「クーロンの法則と電界の重ね合わせ」に基づいた導出を見て頂き，結論に納得してもらえたら，と思います。

今回の問題では積分計算が登場しますが，解説の前に確認として，区分求積の考え方を簡単に紹介します。

ある微分可能な関数 $y = f(x)$ の範囲 $a \leqq x \leqq b$ を考え，さらにこの範囲を微小区間 Δx で均等に区切り，下図のような長方形の面積

$f(x) \times \Delta x$　の和

を考えます。



Δx を限りなく 0 に近づけて，無限個の長方形の面積の和で考える場合，この和は定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

の値と一致することは，納得してもらえると思います。今回の問題はこの考え方が文中に与えられていましたが，数学の問題ではこれは自明とせず「はさみうち」を用いた証明を行うべき所となりますので，注意して下さい。

では解説を始めたいと思います。

【解答解説】

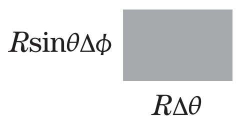
球の表面積は $4\pi R^2$ であるので，単位面積当たりの電気量 ρ は

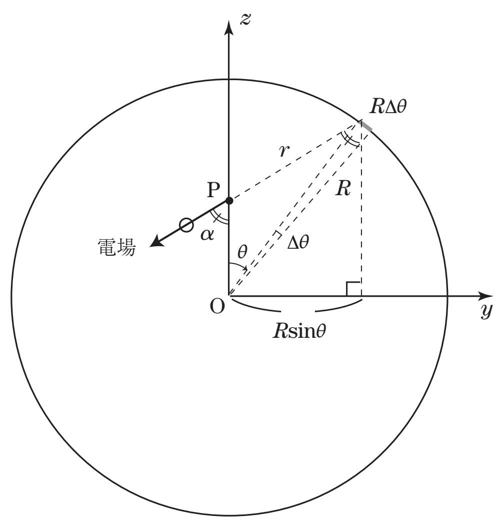
$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad \boxed{\quad 1 \quad}$$

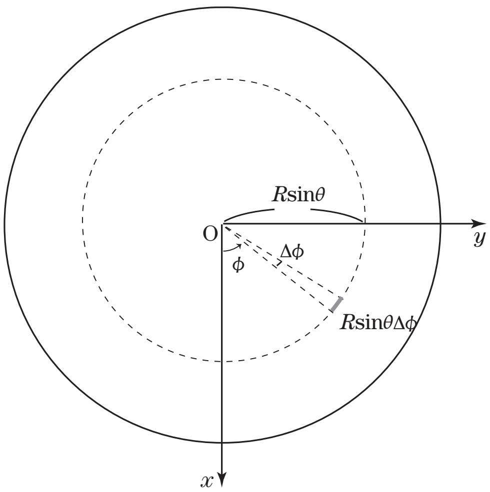
注目していいる微小部分は，下図のような長方形と考えて，その面積 s は

$$s = R\Delta\theta \times (R\sin\theta)\Delta\phi = (R^2\sin\theta)\Delta\phi\Delta\theta$$

$$\boxed{\quad 2 \quad}$$







この微小部分と点Pとの距離 r は，余弦定理より

$$r=\sqrt{R^2+z_1{}^2-2Rz_1\cos\theta}$$

よって，この微小部分が点Pに発する電場の大きさ E は

$$E=k\frac{\rho s}{r^2}=\frac{k\rho s}{R^2+z_1{}^2-2Rz_1\cos\theta}$$

$\boxed{3}$

この電場の z 成分 E_z は，図より

$$\begin{aligned}E_z&=-E\cos\alpha\\&=-k\frac{\rho s}{r^2}\times\frac{R\cos\theta-z_1}{r}\\&=-\frac{k\rho(R^2\sin\theta)(R\cos\theta-z_1)}{(R^2+z_1{}^2-2Rz_1\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\Delta\phi\Delta\theta\end{aligned}$$

$\boxed{4}$

L上の電荷が点Pに発する電場の z 成分の和 E_z' は，与式より

$$E_z'=\int_0^{2\pi}-\frac{k\rho(R^2\sin\theta)(R\cos\theta-z_1)}{(R^2+z_1{}^2-2Rz_1\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\Delta\theta\,d\phi$$

$$=-\frac{2\pi k\rho(R^2\sin\theta)(R\cos\theta-z_1)}{(R^2+z_1{}^2-2Rz_1\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\Delta\theta$$

$\boxed{5}$

球殻上の全電荷が点Pに発する電場の z 成分の和 E_z'' は，与式より

$$E_z''=\int_0^{\pi}-\frac{2\pi k\rho(R^2\sin\theta)(R\cos\theta-z_1)}{(R^2+z_1{}^2-2Rz_1\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}d\theta$$

ここで， $t=R^2+z_1{}^2-2Rz_1\cos\theta$ とおくと，

$\dfrac{dt}{d\theta}=2Rz_1\sin\theta$　また，$\cos\theta=\dfrac{R^2+z_1{}^2-t}{2Rz_1}$

よって，$E_z''=\displaystyle\int_{t_0}^{t_\pi}-\frac{\pi k\rho R}{2z_1{}^2}\{(R^2-z_1{}^2)t^{-\frac{3}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\}\,dt$

ここで，$t_\pi=R^2+z_1{}^2-2Rz_1\cos\pi=(R+z_1)^2$

$t_0=R^2+z_1{}^2-2Rz_1\cos 0=(R-z_1)^2$

$$E_z''=-\frac{\pi k\rho R}{2z_1{}^2}\Big[-2(R^2-z_1{}^2)t^{-\frac{1}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}\Big]_{t_0}^{t_\pi}$$

$$=-\frac{\pi k\rho R}{2z_1{}^2}\{-2(R^2-z_1{}^2)(\frac{1}{R+z_1}-\frac{1}{R-z_1})-2(2z_1)\}$$

$=0$

$\boxed{6}$

よって，$0\leqq z_1<R$ の全ての点において，電場の z 成分は0である。

z 軸に垂直な電場成分についても，問題で与えられた図から考えて，z 軸に対して対称な電荷が点Pに発する電場は，z 軸に対して対称な成分が互いに打ち消し合うので，その和は0になる。

$\boxed{7}$

以上から，球殻内は z_1 によらず全ての点において電場が打ち消されている事が導かれる。

＜参考＞

「球殻内は“全ての点”において電場が打ち消されている」というきれいな結論が得られました。

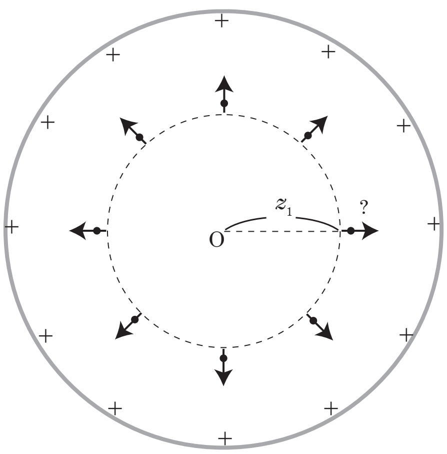
大学で習う法則，ガウスの法則から同じ結論を導

きだす考え方もあります。簡単に紹介すると

任意の平曲面上の各点を，面に垂直に，面内部から外部で貫く電場成分とその部分の微小面積の積を考え，その平曲面上の和は，「面内部に含まれる電気量／真空の誘電率 ε_0」と一致する。

という法則です（文章にするとピンときませんね）。

例えば下図の様に，球殻と同じ中心点を持つ半径 z_1 の球面を考え，その球面上では全ての点において，一様な大きさの電場 E'' が面と垂直な方向に発生していると仮定すると，面内の電気量は 0 なので



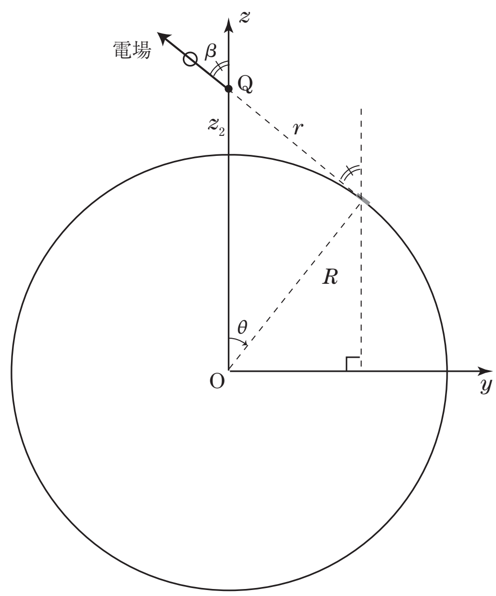
$$E'' \times 4\pi R^2 = 0 \,/\, \varepsilon_0$$

$$\therefore E'' = 0$$

と簡潔に導出されます。クーロンの法則から導くより非常に早い，優れた導出なのですが，「着目している範囲では，発生している電場の大きさが“一様”である」という事は自明としているので，実はやや曖昧な部分を残した導出である事は注意して下さい。

【問】

下図の様な $z_2 > R$ の点 Q において，球殻上の $\theta \sim \theta + \Delta\theta$，$\phi \sim \phi + \Delta\phi$ の微小範囲内に含まれる電荷が点 Q に発する電場の z 成分は，上記の問題と同様に考えて良く，



$$E_z = E\cos\beta$$

$$= -\frac{k\rho(R^2\sin\theta)(R\cos\theta - z_2)}{(R^2 + z_2{}^2 - 2Rz_2\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\,\Delta\phi\Delta\theta$$

となり，よって球殻上の全電荷が点 Q に発する電場の z 成分の和 E_z'' も，同様に積分して

$$E_z'' = -\frac{\pi k\rho R}{2z_2{}^2}\left\{-2(R^2 - z_2{}^2)t^{-\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}\right\}_{t_0}^{t_\pi}$$

ここで平方根の符号に注意して，t_π，t_0 の値を代入すると，

$$E_z'' = -\frac{\pi k\rho R}{2z_2{}^2}\left\{-2(R^2 - z_2{}^2)\left(\frac{1}{z_2 + R} - \frac{1}{z_2 - R}\right) - 2(2R)\right\}$$

$$= \frac{4\pi k\rho R^2}{z_2{}^2}$$

または，$\rho = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$ を代入して，$E_z'' = \dfrac{kQ}{z_2{}^2}$

<参考>

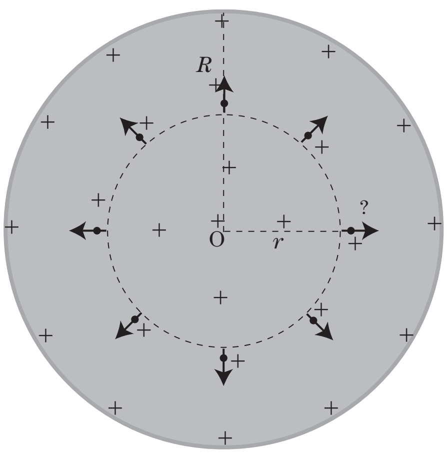
「球殻外に発生する電場は，点電荷が発する電場と同様に考えて良い」という風に，球殻外の電場についてもきれいな結論が出ました。

この結論も，通常は電磁気問題を解く際に自明として考えますが，深く考えると本当に点電荷と同様に考えて良いのか，気になる部分だと思います（…私だけ細かい部分を気にし過ぎでしょうか？）

今回の導出は只の確認作業ではなく，導出を通して「発生している電場の大きさを調べる際に，どの部分の電荷を考慮すべきか？」という点が理解出来ると思います。

例えば半径 R の誘電体の球があり，その中に均等に電荷を帯電させた場合を考えます（電気量の合計 Q)。このとき，球の中心点から距離 $r(<R)$ の点で発生している電場の大きさは？という問いを出されたとき，計算の前に「目のつけどころ」がポイントとなります。

下図の様に，半径 r の球面を考え，「この球面の外部にある電荷は無視」「球面の内部にある電荷 $Q\times(\frac{4}{3}\pi r^3\div\frac{4}{3}\pi R^3)$ が球面上に作る電場を点電荷の電場と同様に考える」とすれば正解です。



物理法則，公式の導出は入試本番では実際に行う時間はありませんが，普段の学習において導出を一旦理解しておく事は，より応用的な問題を取り組む際に「目のつけどころ」が明確になる，という利点があります。電磁気以外でもそうですか，解き方が曖昧になりがちな苦手な単元などある場合は，一度公式の成り立ちをじっくりと見直してみる事が最も有意義ではないか，と思います。意識して見てください（すでに実践している人も多いかも知れませんね）