強者の戦略

第55回の解答編です。本問は地震波をテーマに，波の三大性質と言える「干渉」「反射・屈折」「ドップラー効果」のすべてを問うています。総合力を問われる問題であると言っていいでしょう。では，解答解説に移りましょう。

(1)

(a)　屈折の法則より，

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

(b)　(a) より，

$$\sin\theta_2=\frac{v_2}{v_1}\sin\theta_1$$

地震波が全反射する条件は，

$$\frac{v_2}{v_1}\sin\theta_1>1 \qquad \therefore\ \sin\theta_1>\frac{v_1}{v_2}$$

(2)

(a)　経路差 l は，

$$l=\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CD}}$$

である。点 D の地表に対する対称点を点 D′ とすると $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CD'}}$ より，

$$l=\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CD'}}$$

$\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CD'}}=\overline{\mathrm{BD'}}$ より，

$$l=\overline{\mathrm{BD'}}$$

図より，$\overline{\mathrm{BD'}}=2h\cos\theta_2$ なので，

$$l=2h\cos\theta_2$$

(b)　点 C での反射は位相変化が 0 であるが，点 D での反射は位相変化が π である。
反射による位相変化も考慮して，2 つの波の位相差 ϕ は，

$$\phi=2\pi\frac{l}{\dfrac{v_2}{f_{\mathrm{m}}}}-\pi$$

l の値を代入して，

$$\phi=2\pi\frac{2h\cos\theta_2}{\dfrac{v_2}{f_{\mathrm{m}}}}-\pi$$

この位相差について，振動の振幅が大きくなる（強めあう）条件は，

$$\phi=2\pi m \quad (m=0,1,2,\cdots)$$

であるので，

$$2\pi\frac{2h\cos\theta_2}{\dfrac{v_2}{f_{\mathrm{m}}}}-\pi=2\pi m$$

$$\therefore\ f_{\mathrm{m}}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{v_2}{2h\cos\theta_2}$$

(3)　ドップラー効果の式より，

$$f_{\mathrm{m}}=\frac{v_1-0}{v_1-V\cos\theta_1}f_{\mathrm{m}}'$$

$$\therefore\ f_{\mathrm{m}}'=\frac{v_1-V\cos\theta_1}{v_1}f_{\mathrm{m}}$$

(4)

(a)　まず，地表における振動の振幅を大きくする条件について考える。これは，観測点が起振機の真上であることを考慮して，(2)(b) で $\theta_2=0$ とすればよい。

$$f_{\mathrm{m}}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{v_2}{2h} \quad \cdots \quad ①$$

①より，このときの波長を λ_{m} とすると，

$$\lambda_{\mathrm{m}}=\frac{v_2}{f_{\mathrm{m}}}=\frac{2h}{\left(m+\dfrac{1}{2}\right)}=\frac{4h}{2m+1}$$

となり，これより地層 II 中の地震波は地表を腹，地層 I と地層 II の境界を節とする定常波となっていることがわかる。

次に，地表からの深さ $\frac{4}{5}h$ における振動の振幅を大きくする条件を考える。これは，深さ $\frac{4}{5}h$ で起振機 I からの直接波と地表からの反射波が強めあうことを考える。振動数の小さい方から n 番目 $(n=1,2,3,\cdots)$ のものを f_{n}' とする。地表での反射による位相変化は 0 であるので，2 つの波の位相差 ϕ は，

$$\phi=2\pi\frac{2\left(\dfrac{4}{5}h\right)}{\dfrac{v_2}{f_{\mathrm{n}}'}}$$

振動の振幅が大きくなる（強めあう）条件は，

$$\phi = 2\pi n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

であるので，

$$2\pi \frac{2\left(\frac{4}{5}h\right)}{\frac{v_2}{f_{\mathrm{n}}{}'}} = 2\pi n$$

$$\therefore \quad f_{\mathrm{n}}{}' = n\frac{5v_2}{8h} \quad \cdots \quad ②$$

$f_{\mathrm{m}} = f_{\mathrm{n}}{}'$ として①，②より，

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{v_2}{2h} = n\frac{5v_2}{8h}$$

$$\rightarrow \quad 4m + 2 = 5n \quad \cdots \quad ③$$

①，②より m，n の値が小さいほど f_{m}，f_{n} の値が小さくなるので，振動数の最小値を求めるためには③を満たす m，n の最小値を求めればよい。

$m = 0, 1, 2, \cdots$ と $n = 1, 2, 3, \cdots$ に注意して③を満たす m，n の最小値を求めると，

$$m = n = 2$$

となる。以上より，

$$f_{\min} = \frac{5v_2}{4h}\left(= f_2 = f_2{}'\right)$$

(b)　問 (4)(a) の状態で，起振機Ⅰに加えて起振機Ⅱからも正弦波を発生させたとき，地表および地表からの深さ $\frac{4}{5}h$ における振動の振幅がともに大きくなるためには，起振機Ⅱの位置における起振機Ⅰ，Ⅱそれぞれから発生する正弦波の位相差が 2π の整数倍になればよい。

起振機Ⅱの位置における起振機Ⅰから発生する正弦波の位相を $\theta_1(t)$ として，

$$\theta_1(t) = 2\pi f_{\min}\left(t - \frac{\Delta}{v_1}\right)$$

起振機Ⅱの位置における起振機Ⅱから発生する正弦波の位相を $\theta_2(t)$ として，位相差 $\phi = \frac{3}{2}\pi$ を考慮して，

$$\theta_2(t) = 2\pi f_{\min} t - \frac{3}{2}\pi$$

以上より，i を整数として

$$\left(2\pi f m_{\min} t - \frac{3}{2}\pi\right) - \left\{2\pi f_{\min}\left(t - \frac{\Delta}{v_1}\right)\right\} = 2\pi i$$

$$\therefore \quad \Delta = \left(i + \frac{3}{4}\right)\frac{v_1}{f_{\min}}$$

$\Delta > 0$ より i では 0 以上の整数なので，Δ が最小となるのは $i = 0$ のときである。

よって，

$$\Delta_{\min} = \frac{3v_1}{4f_{\min}}$$

いかがだったでしょうか。

今回の解答解説では，干渉条件として位相差 $\Delta\theta = 2\pi\frac{\Delta l}{\lambda}$ （Δl：経路差）を用いました。2 波の振動の位相差が 2π の整数倍，すなわち同じ振動状態であれば強めあいとなります。すなわち，

$$2\pi\frac{\Delta l}{\lambda} = 2\pi m$$

です。もちろん，経路差の条件である $\Delta l = m\lambda$ を用いても解けます。両式が同じことを表しているのは言うまでもないですね。

東北地方を中心とした大震災が発生したのはこの試験の 6 年後，2011 年のことです。復興はいまだ道半ばであり，私たちはそのまっただ中にいます。この入試問題を作成した大学関係者の方々のことを私は知りません。しかし，いまどのような胸中であるかは推察できます。きっと，大自然の前では現代科学がいかに無力であったかを痛感し，そして同時に，（悲しいことですがきっと起こるであろう）次の地震では被害を少しでも食い止めるべく，それぞれの研究をより一層進めようと決意されているものと想像します。被災者に寄り添い，同時に前を向いて一歩ずつ進んでいきたい。私もそう思います。

今回はここまでです。自然災害からの復興が一日も早く遂げられることを祈りつつ，またお会いできる日まで。