強者の戦略

第５６回に引き続き，藤原です。第５７回目は前回紹介した問題「滑るとき,倒れるとき」の解説です。

実は今回の様な問題は，昔の問題集や過去問集の解説ページを見ると，＜難易度：易＞，＜基本的＞というマークが付いている事が多いです。現在の課程の教科書で学習している人にとっては，「どこが易！?」といった感想になると思います。

入試問題における難易度は，扱うテーマの理論的な難しさだけでは決まりません。「大概の問題集に掲載されていて，ほとんどの人が見た事ある問題」「理屈は良くわかっていなくても，計算の仕方だけは暗記している問題」などは正答率が高くなり，結果的に難易度は易の扱いになります。

現行の物理入試問題で，難易度を調整する場合，主な難易度の上げ方には以下の様な方法があります。

(1) 基本的なテーマを複数組み合わせる事によって，状況を複雑にする。

１つ１つは簡単なテーマでも，複数の事を同時にやらせると，順序立てて解く為の処理能力が必要となり，難しくなります。

(2) 頻出テーマの問題について，条件を少し変化させる事で暗記では解けなくする。

（小球に糸を取り付けて円運動させていたのを，糸ではなく棒に変えるなど)。普段から暗記ではなく，公式や法則を正しく使って丁寧に物理の計算練習をしているかどうかが問われます。

(3）問題集で見た事無いような，目新しいテーマを素材に高校範囲外の知識は与えた上で解かせる。

一部の大学だけで出題される最も難易度の高い出題形式かと思います。一番鍛えるのが難しい部分かと思います。日々の学習の中で合理的な解法を身につけるだけではなく，「様々な興味や疑問を常に持つようにする」といったトレーニングを如何に積んでいるかが重要かと思います。

(4) その他，数学的な難易度（解析，幾何など）を上げる。

２０２０年度からのテスト変更においても，物理（引いては理科）としての難易度の調整の仕方，それに対するトレーニングの仕方に関しては，根本の部分は変わらないのではないかと考えています。

出会った一題，一題について，解法だけでなく，深く色々と考えてみる。「ばねが自然長となる位置で２物体が離れると書いてあるが，自然長以外の位置で離れる事はあり得るのか？」「断熱変化，等温変化ってどのように実験装置を変えたらよいのだろうか？」「反射板が動くとき，入射角と反射角が等しく無くなるって結論が書いてあるけど，なんで？」「導体棒と電池，抵抗がつながった回路だったけど,コンデンサーがつながったらどうなるだろう？」

人によって，浮かぶ疑問は千差万別だと思います。答えが見つからないものも出てくるかと思います。日々「疑問を感じる」トレーニング自体に，知恵を鍛える効果があると思います。

今回は模範解答の他に，問題と模範解答では曖昧にしている部分を＜補足＞の部分で触れています。参考にしてみて下さい。

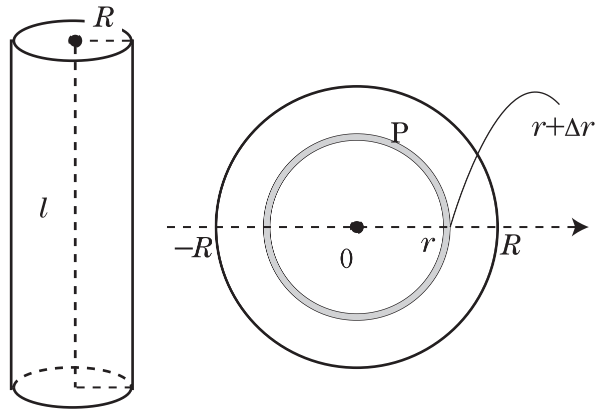
また今回の実験において，私が思いつく限りの様々な条件変更（例:斜面の傾斜角を変える,等）と，それらが結果に影響するか，といった考察を＜考察＞の部分に掲載しました。上記に書いた様なトレーニングの一例として，これも参考にしてみて下さい。

【解答解説】

＜はじめの補足：慣性モーメントについて＞

今回問題文中に与えられている慣性モーメント $I=\dfrac{1}{2}MR^2$ は，積分を用いて導きだす事が出来る。

下図 a の様に底面積 πR^2，高さ l の円柱を考えて，その密度を ρ とする。



図a　図b

図 b の様に中心軸からの距離が r から $r+\Delta r$ の範囲のパイプ状の部分 P について，Δr が微小とすると，断面積 $2\pi r\Delta r$, 体積 $l(2\pi r\Delta r)$, 質量 $\rho l(2\pi r\Delta r)$ となる。

$0\leqq r\leqq R$ の範囲で円柱を上の様な無数のパイプ状（バームクーヘン状）に切り取りとった場合，その質量の和 M は，

$$M=\int_0^R \rho l(2\pi r)dr =\pi\rho lR^2$$

と表す事が出来る（この考え方，区分求積法はこのページの第４６回でも触れていますので，気になる人はご覧下さい)。

一方，部分 P の慣性モーメントは，質量 $\rho l(2\pi r\Delta r)$ と r^2 の積とみなせるので，その和 I は，

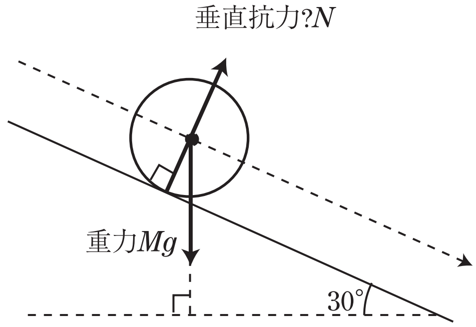
$$I=\int_0^R \rho l(2\pi r)r^2dr =\frac{1}{2}\pi\rho lR^4=\frac{1}{2}MR^2$$

となる。

（１）

下図より，斜面に沿った方向の運動方程式

$$Ma_1=Mg\sin30^\circ$$



（２）

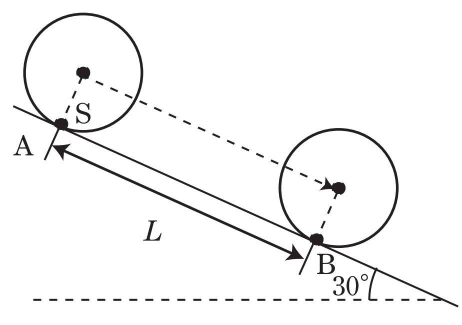
（１）より，$a_1=\dfrac{1}{2}g$

移動時間 t_1 とすると，

$$L=\frac{1}{2}a_1{t_1}^2 \Leftrightarrow t_1=\sqrt{\frac{2L}{a_1}}=2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

＜補足２：滑らかな斜面上の運動＞

摩擦のない斜面上で静かに放した場合，円柱は回転しない。円柱上のうち，はじめに斜面と接している部分を S とすると，S が常に斜面と接している状態で，円柱は斜面を滑り落ちて行く落ちていく。

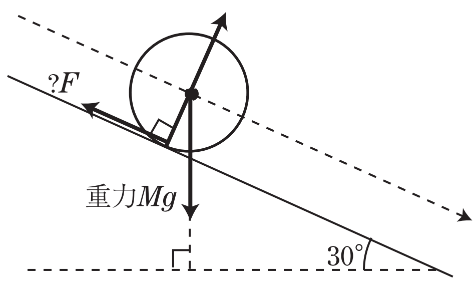


回転しない理由としては，(1) の図のように重力も垂直抗力も，その作用線が円柱の中心軸を通っているので，力のモーメントが 0 であるためである。（回転の）角速度 ω は初めの 0 から加速する事はない。

（３）

下図より，斜面に沿った方向の運動方程式

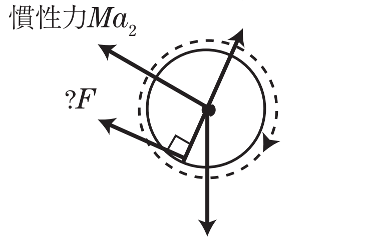
$$Ma_2=Mg\sin30^\circ-F \quad \cdots①$$



（4）

重心から円柱全体を見た場合，下図の様に慣性力も働く（重力と同様に，重心の位置に働く）。

(重心から見ると)



しかし力のモーメントを持つのは，静止摩擦力 F のみであり，中心軸の周りの回転の運動方程式は，

$$\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha = FR \qquad \cdots②$$

注：今回，「接触部分は滑らない」と問題文に書かれているので，今回の摩擦力は静止摩擦力であり，その強さは未知数扱いとなる。

（5）

（3）の①，（4）の②，そして与式 $R\alpha = a_2$ …③ の3式を，a_2，α，F を未知数とした連立方程式とみなす。

③ ⇔ $\alpha = \dfrac{a_2}{R}$，②に代入して α を消去して

$F = \dfrac{1}{2}Ma_2$，①に代入して F を消去して

$$Ma_2 = \frac{1}{2}Mg - \frac{1}{2}Ma_2 \quad \therefore a_2 = \frac{1}{3}g$$

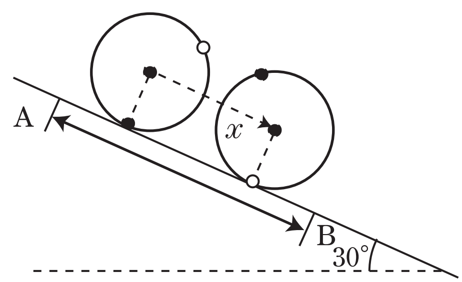
（6）

（5）より，移動時間 t_2 とすると，

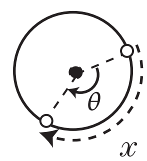
$$L = \frac{1}{2}a_2 {t_2}^2 \Leftrightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2L}{a_2}} = \sqrt{\frac{6L}{g}}$$

＜補足3：与式 $R\alpha = a_2$ について＞

重心が図のように斜面傾斜方向に x 進んだとき，重心から円柱全体を見ると，白点の部分が黒点の部分まで，円弧上を距離 x 回転して見える。



(重心から見ると)



よって，この間の

回転角 θ(単位は [rad]) は，$\theta = \dfrac{x}{R}$，

角速度 ω は $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{R}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{v}{R}$ ⇔ $R\omega = v$

（半径 R は一定）

これは円運動の章でも習う式であるが，更に両辺を t で微分すると，$R\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{dv}{dt}$ $\quad \therefore R\alpha = a_2$

となって，与式となる。

また，（7）の移動時間であるが，回転運動の方

に注目して求める事も可能である。先ほどの図において，重心が斜面傾斜方向に L 進んだとき，重心から円柱全体を見て，白点の部分が円弧上を距離 L 回転して見える。また，この白点は円弧上を，初速 0，加速度 $R\alpha(=a_2)$ で加速して見えるので，白点が円弧上を距離 L 回転する時間は先ほどの t_2 と同じ値になる。

＜考察：条件を変えて実験すると＞

今回転がるよりも滑る方が，重心の加速度が大きく移動時間が短い事がわかった（$a_1>a_2$，$t_1<t_2$）。条件を変えても，$t_1<t_2$ の結果となるかを検討したい。

条件変更で私が思いつくものを述べると，

Ⅰ．斜面の傾斜角を変える。

Ⅱ．円柱の底面の半径を変える。

Ⅲ．円柱の質量を変える。

Ⅳ．質量と半径はそのままで球形に変える。

等がある。結果は以下の通り。

<u>Ⅰ．斜面の傾斜角を変える。</u>

傾斜角を ϕ（$0<\phi<90^\circ$）とすると，

滑らかに滑るときの加速度 は，$a_1=g\sin\phi$

転がるときの式①は，$Ma_2=Mg\sin\phi-F$

となり，これと式②，③（この２式は ϕ によらず同じ式のまま）から，$a_2=\dfrac{2}{3}g\sin\phi$　と求まる。

結果，$a_1>a_2$ であり，$t_1<t_2$ の結果となる。

<u>Ⅱ．円柱の底面の半径を変える。</u>

<u>Ⅲ．円柱の質量を変える。</u>

a_1 や a_2 を求める際，計算途中で R や M は消去される。この事から，この２つの値は今回の運動において，加速度や移動時間に影響を与えない事がわかり，結果は変わらない。

<u>Ⅳ．質量と半径はそのままで球形に変える。</u>

形が変われば，質量は同じでも慣性モーメントは異なる。球の慣性モーメントは $\dfrac{2}{5}MR^2$ である（数学的導出は挑戦して見て下さい）。

式②が，($\dfrac{2}{5}MR^2$)$\alpha=FR$ となり，斜面の傾斜角は 30° として，$a_1=\dfrac{1}{2}g$，$a_2=\dfrac{5}{14}g$

結果，円柱と球では転がる時間は異なるが，$a_1>a_2$，$t_1<t_2$ となる結果は変わらない。

＜補足４：運動エネルギーについて＞

改題前の元の入試問題では，移動時間ではなく，距離 L 移動した瞬間の運動エネルギーについて問われていました。原題の方は「力学的エネルギー保存」が成立している事を自明として，計算させていますが，このページでは先ほど求めた移動時間から考えてみたいと思います。

「滑るとき」距離 L 移動した瞬間の

速さ　$v_1=a_1t_1=\sqrt{gL}$

運動エネルギー　$K_1=\dfrac{1}{2}Mv_1{}^2=\dfrac{1}{2}MgL$

$(=MgL\sin30^\circ)$

「転がるとき」距離 L 移動した瞬間の

重心の速さ　$v_2=a_2t_2=\sqrt{\dfrac{2}{3}gL}$，またこの瞬間の角速度 ω_2 について，補足３より $\omega_2=\dfrac{v_2}{R}$

運動エネルギー K_2 は，「重心と同じ速度で動く分の運動エネルギー K_2'」と「重心から見て回転運動している分の運動エネルギー K_2''」の和で考えられる。

$$K_2'=\frac{1}{2}Mv_2{}^2=\frac{1}{3}MgL$$

一方＜はじめの補足＞で登場した，中心軸からの距離が r から $r+\Delta r$ の範囲のパイプ状の部分 P の，角速度 ω_2 のときの回転の速さは $V_2=r\omega_2=\dfrac{r}{R}v_2$ であり，その（回転による）運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}\rho l(2\pi r\Delta r)\left(\frac{r}{R}v_2\right)^2$$

となる。よって，和を考えて

$$
\begin{aligned}
K_2'' &= \int_0^R \frac{1}{2}\rho l(2\pi r)\left(\frac{r}{R}v_2\right)^2 dr \\
&= \frac{{v_2}^2}{2R^2}\int_0^R \rho l(2\pi r)r^2 dr \\
&= \frac{{v_2}^2}{2R^2} I \\
&= \frac{1}{4} M{v_2}^2 \quad (\because I = \frac{1}{2} MR^2) \\
&= \frac{1}{6} MgL
\end{aligned}
$$

以上より，$K_2 = K_2' + K_2'' = \frac{1}{2} MgL (= MgL\sin 30^\circ)$

すなわち，滑る場合も転がる場合も重力の位置エネルギーが減少した分の運動エネルギーが生じており，力学的エネルギーは保存される。転がる方は摩擦力が働くが,「静止摩擦力」であるので，熱は発生せずに力学的エネルギーは保存される（「動摩擦力」が働く場合は，熱が発生して力学的エネルギーは減少する）。

繰り返しになるが，実際の昔の入試問題の方は上記の様な積分計算は要求しておらず,「力学的エネルギーが保存される」という結論を暗記しておき，移動後の運動エネルギーを

移動後の運動エネルギー＝移動前の位置エネルギー

＝ $MgL\sin 30^\circ$

という流れで答える問題となっている。

＜補足５：さらに運動エネルギーについて＞

先ほどの＜補足４＞の話について，$K_2 = K_2' + K_2''$ に釈然としない人もいるであろう。K_2'' は「相対速度で考えた運動エネルギー」であるため，それぞれ別の観測系から考えた運動エネルギー K_2'，K_2'' を足したものを，運動エネルギーの和と考えて良いのだろうか。

（※重心から見た運動については，この物理ページの第２４回（第２３回の問題の解説）でも触れているので，物理の視野をより広くしたい人は一度見てもらいたい。）

例えば，質量 m_1，m_2 の２つの質点がそれぞれ速度ベクトル $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ で運動しているとき，(m_1+m_2) 全体の重心の速度 $\overrightarrow{v_G} = \dfrac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2}$ となる。

また，重心から見た m_1，m_2 および重心の相対速度はそれぞれ

$$\overrightarrow{v'_1} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_G} \quad (\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v'_1} + \overrightarrow{v_G})$$
$$\overrightarrow{v'_2} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_G} \quad (\Leftrightarrow \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v'_2} + \overrightarrow{v_G})$$
$$\overrightarrow{v'_G} = \overrightarrow{v_G} - \overrightarrow{v_G} \ (= \vec{0}\ )$$

である（当然の事ながら，重心から重心を見たとき，相対速度は０であり静止している)。

(m_1+m_2) 全体の運動エネルギーの和 K は，次の様に変形される。

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} m_1\left(\left|\overrightarrow{v_1}\right|\right)^2 + \frac{1}{2} m_2\left(\left|\overrightarrow{v_2}\right|\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1\left(\overrightarrow{v'_1} + \overrightarrow{v_G}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2\left(\overrightarrow{v'_2} + \overrightarrow{v_G}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1\left(\left|\overrightarrow{v'_1}\right|\right)^2 + m_1\left(\overrightarrow{v'_1}\cdot\overrightarrow{v_G}\right) + \frac{1}{2} m_1\left(\left|\overrightarrow{v_G}\right|\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2\left(\left|\overrightarrow{v'_2}\right|\right)^2 + m_2\left(\overrightarrow{v'_2}\cdot\overrightarrow{v_G}\right) + \frac{1}{2} m_2\left(\left|\overrightarrow{v_G}\right|\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1\left(\left|\overrightarrow{v'_1}\right|\right)^2 + \frac{1}{2} m_2\left(\left|\overrightarrow{v'_2}\right|\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\left|\overrightarrow{v_G}\right|\right)^2 + \left(m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2}\right)\cdot\overrightarrow{v_G}
\end{aligned}
$$

ここで，$m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2} = (m_1+m_2)\overrightarrow{v'_G} = \vec{0}$ であるので,

$$
\begin{aligned}
K = &\frac{1}{2} m_1\left(\left|\overrightarrow{v'_1}\right|\right)^2 + \frac{1}{2} m_2\left(\left|\overrightarrow{v'_2}\right|\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\left|\overrightarrow{v_G}\right|\right)^2
\end{aligned}
$$

となり,

「運動エネルギーの和 K」＝「重心と同じ速度で動く分の運動エネルギー K'」＋「重心に対して回転運動している分の運動エネルギー K''」の和である事が導かれる。これは，質点の数が３つ以上の場合でも同様となり，質点の集合体である剛体などでも成立する。

＜最後に＞

模範解答よりも，補足の部分の方が長い文章となりました。

もし私がこの時代に高校生だったら，気になる事が多すぎて,物理が嫌いになったかも知れません（もしくは，様々な疑問をぶつけさせてくれる恩師に出会って大好きになっているかも知れません)。

この間，工学部２回生となった人に学校の話を聞くと「大学の力学，電磁気学は数学的すぎて，公式証明は自分で出来る気がしないけど，導かれた公式自体は，便利で使える公式だから良しとしようと思っている」と言っていました。工学部出身の先生も，同じ様な事を前に言っていたな，と思いました。

私は理学部出身なので,「その法則・公式は本当に正しいのか？」という事が納得出来ないと使う気がしないタイプです（理学部にもいろんな人はいますが)。「法則を突き詰めたい」のか,「法則を如何に活用するかを突き詰めたい」のか，この部分で志望が分かれるのかなと思います。