解答編です。さっそく解答解説に移りましょう。

問 1　点電荷 B の電気量が $+Q$ のとき，求める電位を V_1 として，

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a-0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2a-a} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$$

また，点電荷 B の電気量が $-Q$ のとき，求める電位を V_2 として，

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a-0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{2a-a} = 0$$

電気量 $+Q$ と $+Q$ の 2 つの点電荷があるとき，合成電位が 0 となる位置は無限遠しかありませんが，電気量 $+Q$ と $-Q$ の 2 つの点電荷があるときは，それぞれの点電荷から等距離にある位置でも電位が 0 となります。これが本問の第一のポイントですね。

問 2

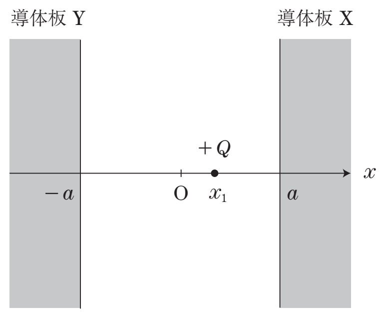
(1)　$x = a$ において，その電位を 0 にするのを実現するのは，問 1 の結果より，「電気量 $-Q$ の点電荷を $x = 2a$ に置く」である。

(2)　(1) の結果より，原点 O の点電荷は $x = 2a$ にある電気量 $-Q$ の点電荷から静電気力を受けると考えてよい。その向きは x 軸正の向きであるので，求める静電気力を F として，

$$F = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|+Q|\times|-Q|}{(2a-0)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4a^2} = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2}$$

電気量 $-Q$ の想像上の点電荷は，原点 O の点電荷と $x = a$ に対して対称の位置にあります。これは光学でいうと $x = a$ に鏡を置いたときの像の位置に対応しますね。問題文にもある通り，導体板表面の電位を 0 にする役割を果たす想像上の点電荷を，その性質から鏡像電荷といい，このような鏡像を考える方法を鏡像法といいます。本問の第二のポイントです。ただし，鏡像を取ると，電荷の正負が入れ替わることに注意しましょう。

問 3



問題図　3

さて，ここからが本番です。問題図 3 のような状況ではどのように考えるべきでしょうか。本問では，$x=a$ と $x=-a$ の電位がともに 0 である条件を満たす必要があります。

まずはじめに，図 1 を見てください。この図は，まず $x=a$ の電位を 0 にするために，点電荷の導体板 X による鏡像 A_1 を配置することからスタートしています。こうすると，問 2 までの議論により，確かに $x=a$ の電位を 0 にすることができます。しかし，この鏡像 A_1 の影響により，$x=-a$ の位置に電位が生じてしまいます。$x=-a$ でも電位は 0 になるわけですから，この位置で鏡像 A_1 の影響は打ち消しておくべきでしょう。そのために，A_1 の $x=-a$ に対する鏡像 A_2 を配置します。こうすると，確かに $x=-a$ において A_1 と A_2 の作る電位は打ち消すことができます。しかし，この鏡像 A_2 の影響により，今度は $x=a$ の位置に電位が生じてしまいます。そこで，この影響を打ち消すために，A_2 の $x=a$ に対する鏡像 A_3 をさらに配置しましょう。こうすると，確かに $x=a$ において A_2 と A_3 の作る電位は打ち消すことができます。しかし，この鏡像 A_3 の影響により，$x=-a$ の位置にまたまた電位が生じてしまいます。そこで，この影響を打ち消すために・・・(以下略)。

もうわかりましたね。ちょうど光学でいう合わせ鏡のように，次々と鏡像ができていくのです。

また，さきほどの図 1 はまず点電荷の導体板 X による鏡像 A_1 を考えましたが，図 2 のように，点電荷の導体板 Y による鏡像 B_1 も考えなければなりません（これにより，$x=-a$ の電位を 0 にすることができます)。ただし，この場合も，B_1 によって $x=a$ に電位が生じるため，これを打ち消すために鏡像 B_2 を考え・・・(以下略)，という風に，同じく次々と鏡像が発生していきます。

以上より，導体板 X，Y による影響は，鏡像 A_1，A_2，A_3，$\cdots$ と 鏡像 B_1，B_2，B_3，$\cdots$ のすべての電荷からの影響として表現することができます。

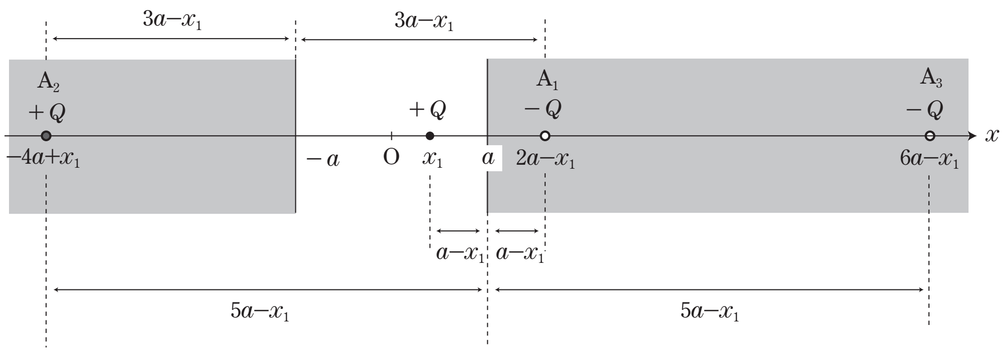


図　1

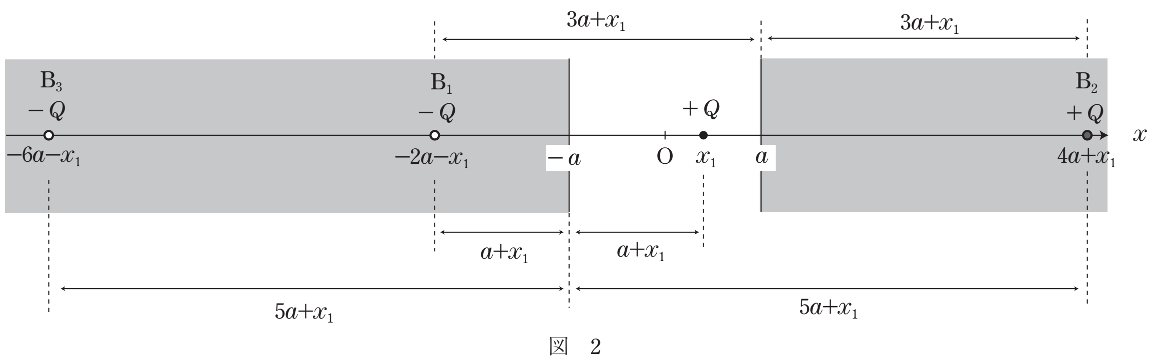


図　2

それでは，以下に解答を続けていきましょう。

先述の議論と図 1，図 2 より，

鏡像 $\mathrm{A_1}$ ： 電気量 $-Q$ ， 座標 $x=2a-x_1$
鏡像 $\mathrm{A_2}$ ： 電気量 $+Q$ ， 座標 $x=-4a+x_1$
鏡像 $\mathrm{A_3}$ ： 電気量 $-Q$ ， 座標 $x=6a-x_1$
鏡像 $\mathrm{A_4}$ ： 電気量 $+Q$ ， 座標 $x=-8a+x_1$
…

鏡像 $\mathrm{B_1}$ ： 電気量 $-Q$ ， 座標 $x=-2a-x_1$
鏡像 $\mathrm{B_2}$ ： 電気量 $+Q$ ， 座標 $x=4a+x_1$
鏡像 $\mathrm{B_3}$ ： 電気量 $-Q$ ， 座標 $x=-6a-x_1$
鏡像 $\mathrm{B_4}$ ： 電気量 $+Q$ ， 座標 $x=8a+x_1$
…

座標 x_1 の点電荷は，上記の鏡像電荷すべてから静電気力を受ける。

まず，鏡像 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，$\mathrm{A_3}$，$\mathrm{A_4}$，… から受ける静電気力の合力を，x 軸正の向きを正として F_A とする。各鏡像電荷から受ける静電気力はすべて正であるので，

$$
\begin{aligned}
F_\mathrm{A} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(2a-2x_1)^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(4a)^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(6a-2x_1)^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(8a)^2}+\cdots \\
&= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(a-x_1)^2}+\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{(3a-x_1)^2}+\frac{1}{(4a)^2}+\cdots\right\}
\end{aligned}
$$

次に，鏡像 $\mathrm{B_1}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{B_3}$，$\mathrm{B_4}$，… から受ける静電気力の合力を，x 軸正の向きを正として F_B とする。各鏡像電荷から受ける静電気力はすべて負であるので，

$$
\begin{aligned}
F_\mathrm{B} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(2a+2x_1)^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(4a)^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(6a+2x_1)^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(8a)^2}-\cdots \\
&= -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(a+x_1)^2}+\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{(3a+x_1)^2}+\frac{1}{(4a)^2}+\cdots\right\}
\end{aligned}
$$

求める合力を F として，

$$
\begin{aligned}
F &= F_\mathrm{A}+F_\mathrm{B} \\
&= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(a-x_1)^2}+\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{(3a-x_1)^2}+\frac{1}{(4a)^2}+\cdots\right\} \\
&\quad -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(a+x_1)^2}+\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{(3a+x_1)^2}+\frac{1}{(4a)^2}+\cdots\right\} \\
&= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(a-x_1)^2}-\frac{1}{(a+x_1)^2}+\frac{1}{(3a-x_1)^2}-\frac{1}{(3a+x_1)^2}+\cdots\right\} \\
&= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left\{\left(1-\frac{x_1}{a}\right)^{-2}-\left(1+\frac{x_1}{a}\right)^{-2}+\frac{1}{3^2}\left(1-\frac{x_1}{3a}\right)^{-2}-\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{x_1}{3a}\right)^{-2}+\cdots\right\}
\end{aligned}
$$

ここで近似を用いて，

$$
\begin{aligned}
F &\fallingdotseq \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left\{\left(1+\frac{2x_1}{a}\right)-\left(1-\frac{2x_1}{a}\right)+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{2x_1}{3a}\right)-\frac{1}{3^2}\left(1-\frac{2x_1}{3a}\right)+\cdots\right\} \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2}\left\{\frac{2x_1}{a}+\frac{1}{3^3}\frac{2x_1}{a}+\cdots\right\} \\
&= \frac{Q^2 x_1}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left\{\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right\} \\
&\fallingdotseq \frac{Q^2 x_1}{4\pi\varepsilon_0 a^3}
\end{aligned}
$$

いかがだったでしょうか？最後の式に出てくる $\left\{\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right\}$ の部分は，さきほどの議論で省いた鏡像 A_5 以降や B_5 以降を考えれば，容易に $\left\{\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}\cdots\right\}$ となるのがわかるはずです。2 つの導体板の影響を合わせ鏡のように考える方法はなかなか興味深いですね。

本日はここまで。次回またお会いしましょう。