強者の戦略

第６７回に引き続き，藤原です。第６８回目は前回紹介した問題の解説です。

今回の問題は設問 (a)，(b) に分かれています。(a) の方は，難易度は低くありませんが従来の物理入試問題と同様の形式の問題で，誘導文を良く読んでいけば，解答すべき事は明確に決定します。物理の入試問題に慣れている人であれば，「特別な思考力」を用いなくても，解答出来たかと思います。

「特別な思考力」を必要としたのは，設問 (b) の方だと思います。ここで与えられている「高度と温度のグラフ」は，実は物理ではなく地学で学ぶ事になるグラフで，物理選択者はもちろんこの様なグラフを扱う機会は無かったと思います。事前知識なしで与えられたグラフについて，物理の法則を用いて考察する，という部分が「特別な思考力を問う問題」と言えるのではないでしょうか。

個人的に感じる事として，地学現象は「物理法則の具体例」として扱える題材が多く，今回の様な「物理の思考力を問う問題」を作成するときに，非常に便利な教科である，と感じています。私自身，地学に多少詳しいので，このような物理と地学をコラボした問題の作成に，今後挑戦してみたいと考えています。

今回は模範解答の他に，＜考察＞＜参考＞の部分で，今回の問題を深く掘り下げた思考について記載しています。この＜考察＞＜参考＞の部分が，今後思考力を問う問題，を扱うにあたって，重要な部分ではなかろうかと考えています。

【解答解説】

(a)

① 直方体内の空気の質量は $\rho S\Delta z$ であるので，直方体内の空気に働く，重力と直方体外の空気からの力のつり合いより，

$$(P+\Delta P)S+\rho S\Delta zg=PS$$

② 空気の質量が nM より，その密度 ρ は，

$$\rho=\frac{nM}{V}\quad\cdots(1)$$

③ ① の式を変形して $\Delta P=-\rho\Delta zg$，これに式 (1) を代入して ρ を消去すると，$\Delta P=-\dfrac{nM\Delta zg}{V}$

④ （$P+\Delta P$，$V+\Delta V$，$T+\Delta T$）における状態方程式

$$(P+\Delta P)(V+\Delta V)=nR(T+\Delta T)$$

⑤ ④ の式について，$\Delta P\Delta V\fallingdotseq 0$ として変形すると

$$PV+P\Delta V+\Delta PV=nRT+nR\Delta T\qquad\text{(i)}$$

また，（P，V，T）における状態方程式

$$PV=nRT\qquad\text{(ii)}$$

(i)−(ii) より，$P\Delta V+\Delta PV=nR\Delta T$

⑥ 断熱変化であるので，気体が外部から吸収した熱 $Q=0$，内部エネルギー変化 $\Delta U=nC_V\Delta T$，気体が外部にした仕事 $W=P\Delta V$，よって熱力学第一法則は，

$$Q=\Delta U+W\Leftrightarrow 0=nC_V\Delta T+P\Delta V$$

⑦ ⑥ の式を変形して $P\Delta V=-nC_V\Delta T$，これを ⑤ の式に代入して $P\Delta V$ を消去すると，

$$-nC_V\Delta T+\Delta PV=nR\Delta T$$
$$\Leftrightarrow\quad \Delta PV=n(C_V+R)\Delta T$$

⑧ マイヤーの公式より，$C_V+R=C_P$，また ③ より $\Delta P=-\dfrac{nM\Delta zg}{V}$，これらを ⑦ の式に代入して

$$-\frac{nM\Delta zg}{V}\,V=nC_P\Delta T$$
$$\Leftrightarrow\quad \Delta T=-\frac{Mg}{C_P}\,\Delta z$$

＜参考＞

※「高度による g の変化は考えない」とあるので，

$\dfrac{Mg}{C_P}$ は z によらない定数とみなせる。よって T と z は一次の関係であり（傾き $\dfrac{\Delta T}{\Delta z}=-\dfrac{Mg}{C_P}$，$z$=0 において切片 T=T_0），T=T_0−$\dfrac{Mg}{C_P}\times z$ となる。

問 1　与えられた値を用いて，温度変化

$$T-T_0=-\frac{Mg}{C_P}\times z$$

$$=-\frac{(2.9\times10^{-2})\times 9.8}{\frac{7}{2}\times 8.3}\times(3.5\times10^3)$$

$$\fallingdotseq -34\,[\mathrm{K}]$$

⑨　⑥ の式を変形して $P\Delta V=-nC_V\Delta T\cdots$(i)，
また状態方程式より PV=$nRT\cdots$(ii)
(i) ÷ (ii) より，$\dfrac{\Delta V}{V}=-\dfrac{C_V}{R}\times\dfrac{\Delta T}{T}$

＜参考＞

この後，式 (3) は与えられているが，数学的に導出してみる。

V と T を，高度 z の関数とみなし，$z\to z+\Delta z$ と変化させたときの，V と T の変化をそれぞれ ΔV，ΔT とする。上の式の両辺を Δz で両辺割ると，

$$\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta z}=-\frac{C_V}{R}\times\frac{1}{T}\frac{\Delta T}{\Delta z}$$

となり，更に Δz を非常に微小な値とすれば，この式は，

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dz}=-\frac{C_V}{R}\times\frac{1}{T}\frac{dT}{dz}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{d}{dz}(\log_e V)=-\frac{C_V}{R}\times\frac{d}{dz}(\log_e T)$$

と表す事も出来る。この式の両辺を z で積分して，

$$(\log_e V)=-\frac{C_V}{R}\times(\log_e T)+C\quad\cdots(\text{Ⅰ})$$

(C：積分定数)

z=0 のときの値，V=V_0，T=T_0 を代入して，

$$(\log_e V_0)=-\frac{C_V}{R}\times(\log_e T_0)+C\quad\cdots(\text{Ⅱ})$$

Ⅰ − Ⅱより，C を消去して，

$$\{(\log_e V)-(\log_e V_0)\}=-\frac{C_V}{R}\times\{(\log_e V)-(\log_e T_0)\}$$

$$\Leftrightarrow\quad (\log_e\frac{V}{V_0})=-\frac{C_V}{R}\times(\log_e\frac{T}{T_0})\quad\cdots(3)$$

＜考察＞

次の ⑩ の計算はやや複雑であるが，様々な物理量からある値の関係式を導出する際，大事なのは「消去すべき物理量は何か？」に目を向ける事である。今回の問題では，誘導文から「体積と温度を消去すべきである」という事に気づく事が出来たら，計算の方針が立てられる。

⑩　式 (1)：$\rho=\dfrac{nM}{V}$，式 (2)：T=T_0−$\dfrac{Mg}{C_P}\times z$，そして式 (3)：$(\log_e\dfrac{V}{V_0})=-\dfrac{C_V}{R}\times(\log_e\dfrac{T}{T_0})$ から，ρ と z の関係を導く。

$\rho=\dfrac{nM}{V}$，$\rho_0=\dfrac{nM}{V_0}$ より，$\dfrac{V}{V_0}=(\dfrac{\rho}{\rho_0})^{-1}$，これと式 (2) を式 (3) に代入して，

$$\log_e(\frac{\rho}{\rho_0})^{-1}=\log_e(1-\frac{Mg}{C_PT_0}z)^{-\frac{C_V}{R}}$$

$$\therefore\ \rho=\rho_0\,(1-\frac{Mg}{C_PT_0}z)^{\frac{C_V}{R}}$$

(b)

問 2

＜考察：解答の方針＞

気体の状態量のうち，高度 z によって変化する値は，圧力 P，体積 V（モル数 n の気体が専有する空間の広さ），温度 T，密度 ρ である（重力加速度 g や 1 モルあたりの質量 M，気体定数 R，モル比熱 C_V，C_P などは高度 z によらない定数と見

なされる)。

(a) の空所補充は，P，T，ρ が高度 z とどんな関係があるかを，導き出そうとしており，特に温度 T と高度 z は，一次の関係（直線）となっている。問 2 では，T と z の直線的な関係図も与えられている。

一方で今回問われている，空気塊に働く重力や浮力は「空気塊の密度」や「大気の密度」で大きさが変化する。すなわちこれらを考える為には，先に「温度と密度の関係」について考察しておく必要性がある。

＜解答＞

(a) の式 (1)：$\rho=\dfrac{nM}{V}$ に，状態方程式 $PV=nRT \Leftrightarrow V=\dfrac{nRT}{P}$ を代入して，$\rho=\dfrac{MP}{RT}$

R と M は定数，密封状態でない空気塊と大気の圧力 P は，同じ高度において等しい値の平衡状態に向かうと考えられるので，空気塊と大気の密度は，温度 T に反比例されると考えられる。また，空気塊に働く浮力（鉛直上向き）は，大気の密度に比例し，重力（鉛直下向き）は空気塊の密度に比例する。この事を考慮して，以下の様に考える。

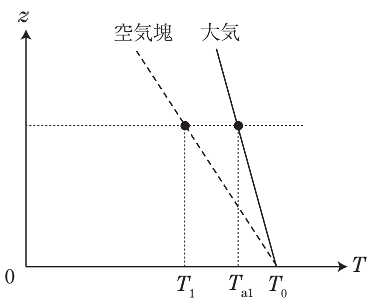
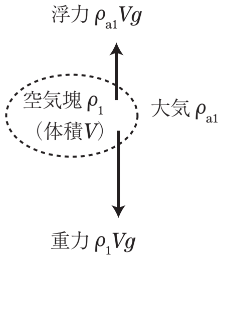


図 2

図 2 の場合，$z>0$ における空気塊の温度 T_1，密度 ρ_1，大気の温度 T_{a1}，密度 ρ_{a1} として，$T_1<T_{a1}$ より，$\rho_{a1}<\rho_1$



よって浮力より重力の方が大きくなり，合力の向きは鉛直下向きとなって，このとき空気塊は下降する。

図 3 の場合は，$0<z<z_{\rm p}$ と，$z>z_{\rm p}$ で結果が異なる。

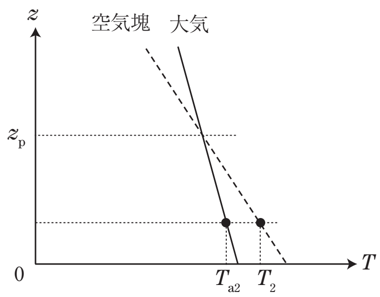
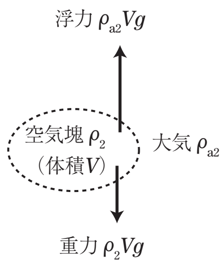


図 3

$0<z<z_{\rm p}$ における空気塊の温度 T_2，密度 ρ_2，大気の温度 T_{a2}，密度 ρ_{a2} として，$T_{a2}<T_2$ より，$\rho_2<\rho_{a2}$



よって重力より浮力の方が大きくなり，合力の向きは鉛直上向きとなって，このとき空気塊は上昇する。

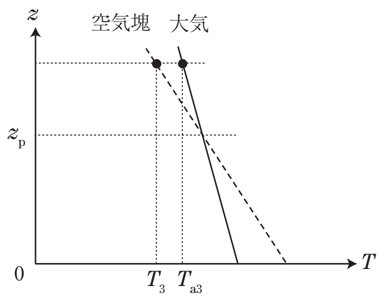
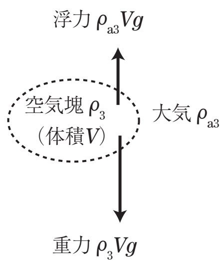


図 3

$z>z_{\rm p}$ における空気塊の温度 T_3，密度 ρ_3，大気の温度 T_{a3}，密度 ρ_{a3} として，$T_3<T_{a3}$ より，$\rho_{a3}<\rho_3$



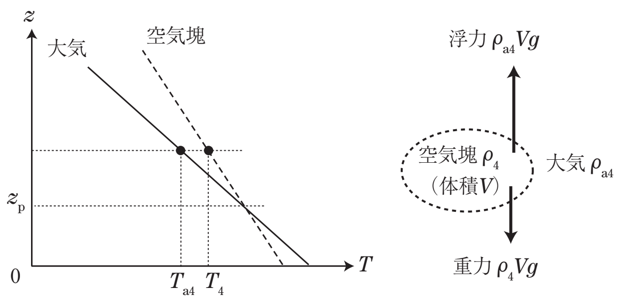
よって浮力より重力の方が大きくなり，合力の向きは鉛直下向きとなって，このとき空気塊は下降する。

＜参考＞

設問（b）は，地学の「大気の安定・不安定」を題材にしている。地学履修者はこのグラフの見方を「習う」ので，簡単に正解を述べる事が出来るが，物理の履修者には難しいと思われる。

因みに今回の図2，3は，どちらも大気の z–T グラフの方が，空気塊のグラフよりも傾きが急（逆に温度変化は緩やか）である。この場合は，ある高度を超えると必ず重力が浮力よりも大きくなるので，空気塊はある高度より上には上昇しなくなる。この様な状態を「安定」と呼ぶ。

一方で，上空に寒気などがなだれ込み，下図の様に大気の z–T グラフの方が，空気塊のグラフよりも傾きが緩やか（逆に温度変化が緩やか）になった場合は，ある高度を超えると必ず浮力が重力よりも大きくなるので，空気塊はその高度より上には上昇を続けて戻ってこれなくなる。この様な状態を「不安定」と呼ぶ。



＜最後に＞

設問 (b) 模範解答を上に示したが，論理的に自力で完全な解答を導き出すのはかなり厳しいと覆います。

温度と高度のグラフから，「空気塊の方が温度が高い→空気塊が浮かぶはず」「大気の方が温度が高い→空気塊は沈むはず」と経験的に判断して，解答を何とか作成しようとした人は点数を貰えたであろうと推測します。

ただ，更に理想を求めれば，物理の問題として出題されている以上，与えられたデータを物理的に考察する要素も入れた方がより適切な解答ではないでしょうか。物理法則として，重力や浮力は温度ではなく，密度で決定されるのだから，温度と密度をどのようにつなげるべきか，に思考が向かう人は非常に「思考力がある人」と思えます。

限られた制限時間の試験内で，このような思考を持つことは現実的には中々難しい事と思いますが，制限時間のない，日々の問題演習の中には，このような思考を取り入れる時間も是非設けて欲しい，と思います。