強者の戦略

物理講師の内多です。

今回は2019年度の京都大学からの出題です。地球のまわりをまわる物体に関する問題ですが，京都大学らしく，誘導に沿って適切な理論式を立て，近似を用いながら解いていく，という形式です。物理の本質的な理解と数式の処理能力を問われる良問ですね。さあ，ぜひチャレンジしてみてください。

（問題は次ページから）

【問題】

次の文章を読んで，$\boxed{\quad\quad}$ に適した式または数値を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\boxed{\quad\quad}}$ はすでに $\boxed{\quad\quad}$ で与えられたものと同じものを表す。また，問 1 では，指示にしたがって，解答を解答欄に記入せよ。ただし，円周率を π とする。

図 1 のように，点 O を中心とする質量 M の地球のまわりを，質量 $\mathrm{m_Z}$ の人工衛星 Z が半径 R の円軌道を角速度 ω でまわっている。この人工衛星の運動について，以下の (1)，(2) に答えよ。

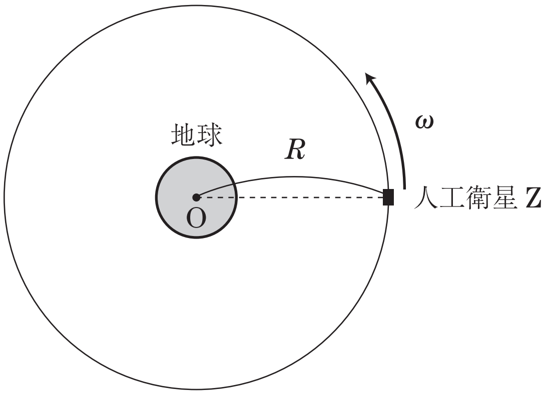


図 1

(1) 図 2(a) のように，この人工衛星 Z に，質量 m_{A} の小物体 A と質量 m_{B} の小物体 B を，2 本の長さがそれぞれ a と b のひもで取り付ける。これらのひもの質量は $m_{\mathrm{Z}}, m_{\mathrm{A}}, m_{\mathrm{B}}$ とくらべて無視できる。また，m_{Z}，m_{A} および m_{B} は M とくらべて十分小さく，人工衛星 Z，小物体 A と小物体 B の間の万有引力は無視できるものとする。

これらの物体は，図 2(b) のように，常に，小物体 A が人工衛星 Z と地球の中心 O を結ぶ線上の地球と反対側，小物体 B が人工衛星 Z と地球の中心 O を結ぶ線上の地球側にあるという配置を保ちつつ，人工衛星 Z は小物体 A と B を取り付ける前と同じ円軌道上を角速度 ω で運動した。

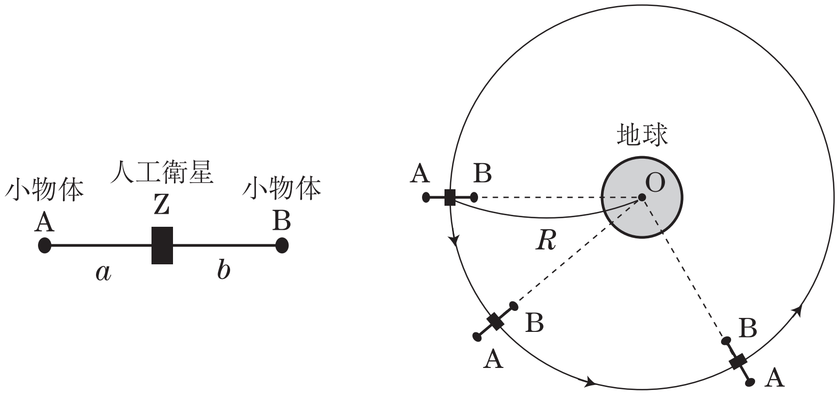
小物体 A に働く万有引力の大きさは，M，m_{A}，R，a，および万有引力定数 G を用いて $\boxed{\text{ア}}$ と表される。また，小物体 A が人工衛星 Z と同じ角速度 ω で運動することから，小物体 A にはたらく遠心力は，m_{A}，R，a，ω を用いて表すと $\boxed{\text{イ}}$ となる。このことから，小物体 A にはたらく力のつりあいの式は，小物体 A と人工衛星 Z の間のひもの張力を N_{A} として，

$$\boxed{\boxed{\text{ア}}} + N_{\mathrm{A}} = \boxed{\boxed{\text{イ}}} \qquad \text{(i)}$$

となる。同様にして，小物体 B にはたらく万有引力の大きさは，M，m_{B}，R，b，G を用いて $\boxed{\text{ウ}}$ と表され，遠心力は m_{B}，R，b，ω を用いて表すと $\boxed{\text{エ}}$ となる。このことから，小物体 B にはたらく力のつりあいの式は，小物体 B と人工衛星 Z の間のひもの張力を N_{B} として，

$$\boxed{\boxed{\text{ウ}}} = N_{\mathrm{B}} + \boxed{\boxed{\text{エ}}} \qquad \text{(ii)}$$

となる。



(a)　　(b)

図２

人工衛星 Z が小物体 A と B を取り付ける前と同じ円軌道を角速度 ω で動き続けたことから，張力 N_A と N_B の間には，c をある数値として，$N_A = c\,N_B$ という関係が成立していたことがわかる。この c の値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

ここで，ひもの長さ a，b が円軌道の半径 R とくらべて十分小さいとする。このとき，ε（>0）が R とくらべて十分小さいときに成り立つ近似式 $\dfrac{1}{(R+\varepsilon)^n} \fallingdotseq \dfrac{1}{R^n}\left(1-n\dfrac{\varepsilon}{R}\right)$，$\dfrac{1}{(R-\varepsilon)^n} \fallingdotseq \dfrac{1}{R^n}\left(1+n\dfrac{\varepsilon}{R}\right)$（$n = 1, 2, \cdots$）を用いると，$m_A$，$m_B$，$a$，$b$ の間に，k をある数値として，$\dfrac{m_A}{m_B} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^k$ という関係が成立していることがわかる。この k の値は $\boxed{\text{カ}}$ である。また，張力 N_A は a に比例しており，その比例定数を m_A と ω を用いて表すと，$\dfrac{N_A}{a} = \boxed{\text{キ}}$ となる。

(2)　図３のように，人工衛星 Z から角度 θ〔rad〕遅れて，質量 m_U の宇宙船 U が同じ円軌道上を同じ速さで運動している。人工衛星 Z と宇宙船 U の間の万有引力は無視できるとする。人工衛星 Z と宇宙船 U の速さ V_0 を M，R，および万有引力定数 G を用いて表すと，$V_0 = \boxed{\text{ク}}$ である。

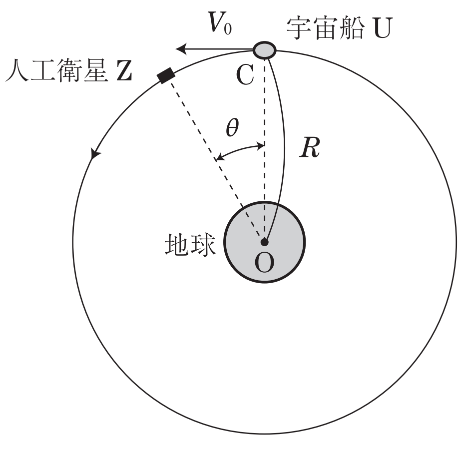


図３

　この宇宙船Uが人工衛星Zに追いつくことを考えよう。宇宙船Uは，点Cにおいて進む方向は変えずに十分短い時間で減速すると，その後，図4の実線で表された楕円軌道をまわる。宇宙船Uが楕円軌道を一周して点Cに戻ってくると同時に，人工衛星Zが点線で表されたように円軌道を一周より少し短い距離をまわって点Cに着くようにしたい。そのために必要な楕円軌道の周期 T_1 と円軌道の周期 T_0 の間に成り立つ関係を，θ を用いて表すと，$\dfrac{T_1}{T_0} = \boxed{\text{ケ}}$ となる。

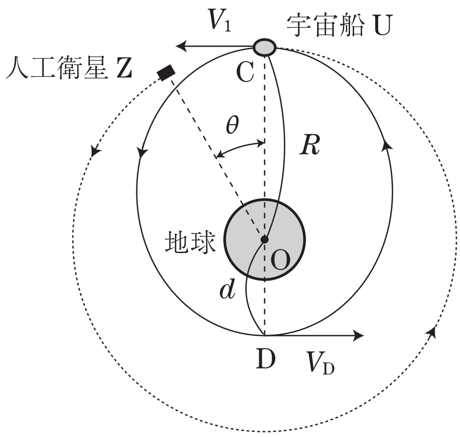


図4

　上で述べたような方法で宇宙船Uが人工衛星Zに追いつくために必要な点Cでの宇宙船Uの減速後の速さ V_1（$< V_0$）を求めよう。

　図4のように，楕円軌道上において宇宙船Uがもっとも地球の中心Oに近い位置が点Dであり，この点DとOとの距離を d とする。距離 d の R に対する比は，ケプラーの第3法則を用いると，楕円軌道の周期 T_1 と円軌道の周期 T_0 の関数として，$\dfrac{d}{R} = \boxed{\text{コ}}$ と表すことができる。ケプラーの第2法則（面積速度一定の法則）および力学的エネルギー保存の法則を点Dでの宇宙船Uの速さ V_D を用いて記述し，さらに，$V_0 = \boxed{\boxed{\text{ク}}}$ の関係を用いると，V_1 の V_0 に対する比は d と R を用いて $\dfrac{V_1}{V_0} = \boxed{\text{サ}}$ と表すことができる。

問1　遅れの角度 θ が π と比べて十分小さいとき，宇宙船Uが上に述べたように人工衛星Zに追いつくために必要な速さの変化量 $\Delta V = V_1 - V_0$ を考える。δ の絶対値が1にくらべて十分小さいときに成り立つ近似式 $(1+\delta)^x \fallingdotseq 1 + x\delta$（$x$ は実数）を用いて，ΔV が θ と V_0 に比例することを示し，その比例係数 $\dfrac{\Delta V}{\theta V_0}$ を求めよ。