強者の戦略

解答編です。

(1)　A が受ける万有引力の大きさを F_{A1}，遠心力の大きさを F_{A2} として，

$$F_{\mathrm{A1}}=G\frac{Mm_{\mathrm{A}}}{(R+a)^2}\quad\boxed{\text{ア}}$$

$$F_{\mathrm{A2}}=m_{\mathrm{A}}(R+a)\omega^2\quad\boxed{\text{イ}}$$

同様に，B が受ける万有引力の大きさを F_{B1}，遠心力の大きさを F_{B2} として，

$$F_{\mathrm{B1}}=G\frac{Mm_{\mathrm{B}}}{(R-b)^2}\quad\boxed{\text{ウ}}$$

$$F_{\mathrm{B2}}=m_{\mathrm{B}}(R-b)\omega^2\quad\boxed{\text{エ}}$$

よって，小物体 A と小物体 B に関する力のつりあいの式は，

$$G\frac{Mm_{\mathrm{A}}}{(R+a)^2}+N_{\mathrm{A}}=m_{\mathrm{A}}(R+a)\omega^2\quad\cdots\quad①$$

$$m_{\mathrm{B}}(R-b)\omega^2=N_{\mathrm{B}}+G\frac{Mm_{\mathrm{B}}}{(R-b)^2}\quad\cdots\quad②$$

ここで，人工衛星 Z が A と B を取り付ける前後で同じ円運動をする，ということから，人工衛星にはたらく糸の張力 N_{A}，N_{B} は打ち消し合わなければならない。よって，

$$N_{\mathrm{A}}=N_{\mathrm{B}}$$

$N_{\mathrm{A}}=cN_{\mathrm{B}}$ と比較して，

$$c=1\quad\boxed{\text{オ}}$$

①と②を足して N_{A}，N_{B} を消去して，

$$G\frac{Mm_{\mathrm{A}}}{(R+a)^2}+m_{\mathrm{B}}(R-b)\omega^2=m_{\mathrm{A}}(R+a)\omega^2+G\frac{Mm_{\mathrm{B}}}{(R-b)^2}$$

$$\rightarrow\quad m_{\mathrm{A}}\left\{(R+a)\omega^2-\frac{GM}{(R+a)^2}\right\}=m_{\mathrm{B}}\left\{\frac{GM}{(R-b)^2}-(R-b)\omega^2\right\}$$

a，b が R に対して十分小さいことから，上式を近似を用いて変形して，

$$m_{\mathrm{A}}\left\{(R+a)\omega^2-\frac{GM}{R^2}\left(1-\frac{2a}{R}\right)\right\}=m_{\mathrm{B}}\left\{\frac{GM}{R^2}\left(1+\frac{2b}{R}\right)-(R-b)\omega^2\right\}\quad\cdots\quad③$$

さらに，人工衛星に関する力のつりあいより，

$$G\frac{Mm_{\mathrm{Z}}}{R^2}=m_{\mathrm{Z}}R\omega^2\quad\rightarrow\quad\frac{GM}{R^2}=R\omega^2\quad\cdots\quad④$$

④を③に代入して，

$$m_{\mathrm{A}}\left\{(R+a)\omega^2-R\omega^2\left(1-\frac{2a}{R}\right)\right\}=m_{\mathrm{B}}\left\{R\omega^2\left(1+\frac{2b}{R}\right)-(R-b)\omega^2\right\}\quad\rightarrow\quad m_{\mathrm{A}}\times3a\omega^2=m_{\mathrm{B}}\times3b\omega^2$$

$$\therefore\quad\frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}}}=\frac{b}{a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$$

$\dfrac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^k$ と比較して，

$k=-1$ $\boxed{\text{カ}}$

この結果を①，②に適用すると，

$$N_{\mathrm{A}}=m_{\mathrm{A}}(R+a)\omega^2-G\frac{Mm_{\mathrm{A}}}{(R+a)^2}\fallingdotseq m_{\mathrm{A}}\times 3a\omega^2 \qquad \therefore\ \frac{N_{\mathrm{A}}}{a}=3m_{\mathrm{A}}\omega^2 \quad \boxed{\text{キ}}$$

$$N_{\mathrm{B}}=G\frac{Mm_{\mathrm{B}}}{(R-b)^2}-m_{\mathrm{B}}(R-b)\omega^2\fallingdotseq m_{\mathrm{B}}\times 3b\omega^2 \qquad \therefore\ \frac{N_{\mathrm{B}}}{b}=3m_{\mathrm{B}}\omega^2$$

(2)　宇宙船 U に関する円運動の中心方向の運動方程式より，

$$G\frac{Mm_{\mathrm{U}}}{R^2}=m_{\mathrm{U}}\frac{V_0^{\,2}}{R} \qquad \therefore\ V_0=\sqrt{\frac{GM}{R}} \quad \boxed{\text{ク}}$$

宇宙船 U が人工衛星 Z に追いつくためには, 人工衛星 Z が円軌道を回転角 $2\pi-\theta$ だけ運動する時間がちょうど宇宙船 U の楕円軌道の周期 T_1 と等しくなればよい。よって,

$$T_1=\frac{2\pi-\theta}{2\pi}T_0 \qquad \therefore\ \frac{T_1}{T_0}=\frac{2\pi-\theta}{2\pi}=1-\frac{\theta}{2\pi} \quad \boxed{\text{ケ}}$$

円軌道と楕円軌道について，ケプラーの第 3 法則より，

$$\frac{T_0^{\,2}}{R^3}=\frac{T_1^{\,2}}{\left(\dfrac{R+d}{2}\right)^3} \qquad \therefore\ \frac{d}{R}=2\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}}-1 \quad \boxed{\text{コ}}$$

宇宙船 U の楕円軌道について，面積速度一定の法則と力学的エネルギー保存より，

$$\frac{1}{2}RV_1=\frac{1}{2}dV_{\mathrm{D}} \quad \cdots \quad ⑤$$

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{U}}V_1^{\,2}+\left(-G\frac{Mm_{\mathrm{U}}}{R}\right)=\frac{1}{2}m_{\mathrm{U}}V_{\mathrm{D}}^{\,2}+\left(-G\frac{Mm_{\mathrm{U}}}{d}\right) \quad \cdots \quad ⑥$$

⑤と⑥より V_{D} を消去して,

$$V_1=\sqrt{\frac{2GMd}{R(R+d)}}$$

よって,

$$\frac{V_1}{V_0}=\frac{\sqrt{\dfrac{2GMd}{R(R+d)}}}{\sqrt{\dfrac{GM}{R}}}=\sqrt{\frac{2d}{R+d}} \quad \boxed{\text{サ}}$$

問 1　$\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$, $\boxed{\text{サ}}$ の結果より,

$$\Delta V=V_1-V_0\fallingdotseq\sqrt{\frac{2d}{R+d}}V_0-V_0$$

ここで,

$$\sqrt{\frac{2d}{R+d}}=\sqrt{\frac{2\times\frac{d}{R}}{1+\frac{d}{R}}}=\sqrt{\frac{2\times\left\{2\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right\}}{1+\left\{2\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right\}}}=\sqrt{2-\frac{1}{\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}}}}=\sqrt{2-\frac{1}{\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}}$$

$$\fallingdotseq\sqrt{2-\left(1+\frac{\theta}{3\pi}\right)}$$

$$=\sqrt{1-\frac{\theta}{3\pi}}$$

$$\fallingdotseq 1-\frac{\theta}{6\pi}$$

であるので，

$$\Delta V\fallingdotseq\left(1-\frac{\theta}{6\pi}\right)V_0-V_0=-\frac{\theta}{6\pi}V_0 \qquad \therefore\ \frac{\Delta V}{\theta V_0}=-\frac{1}{6\pi}$$

いかがだったでしょうか。物理に関する深い知識が必要であることは当然として，それだけでなく，物理的な理論式を近似を用いて数学的に処理していくことも非常に重要な要素となることが体験できたと思います。そのためには，問題で問われているものがどのようなもので，どのように変形すればそれが求まるのかをしっかり考えることが重要ですね。

本日はここまで。次回またお会いしましょう。