強者の戦略

第７１回に引き続き，藤原です。第７２回目は第７１回で紹介した問題の解説です。

今回の公式の導出は教科書には掲載していない事項で，もちろん入試本番でも導出が問われない場合は，結論の公式を述べるようにしないと制限時間内で問題を解く上で不利になってしまいます。

ただ，「導出から学べる事」が２点ありますので，理解を深めるために，公式の導出に一度取り組んでみる事は有意義ではないかと思います。今回は導出問題の解答解説の後に，「導出から学べる事」についても記載したいと思います。

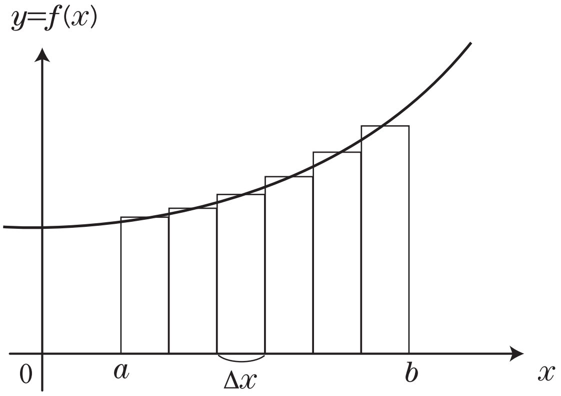
なお，今回の問題では積分計算が登場しますが，解説の前に確認として，区分求積の考え方を簡単に紹介します（別の回でも紹介しています。知っている方は読み飛ばしてもらって結構です)。

＜参考：区分求積＞

ある微分可能な関数 $y=f(x)$ の範囲 $a \leqq x \leqq b$ を考え，さらにこの範囲を微小区間 Δx で均等に区切り，下図のような長方形の面積

$f(x) \times \Delta x$　の和

を考えます。



Δx を限りなく 0 に近づけて，無限個の長方形の面積の和で考える場合，この和は定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

の値と一致することは，納得してもらえると思います。今回の問題はこの考え方が文中に与えられていましたが，数学の問題ではこれは自明とせず「はさみうち」を用いた証明を行うべき所となりますので，注意して下さい。

＜参考終わり＞

では解説を始めたいと思います。

【解答解説】

(1)

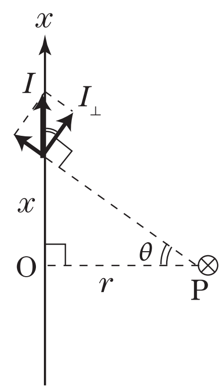
相似比に注目して，

$$I : I_{\perp} = \sqrt{r^2+x^2} : r$$

$$\therefore I_{\perp} = \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}} I \qquad \boxed{1}$$

（別解）下図の様に角度 θ を置いて，三角比より

$$I_{\perp} = I\cos\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}} I$$



ビオ・サバールの法則を用いて，求める磁界の大きさ ΔH は，

$$\Delta H = \frac{I_{\perp}\Delta x}{4\pi(r^2+x^2)} = \frac{Ir}{4\pi(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Delta x$$

$$\boxed{2}$$

直線電流全体が点Pに作る磁界の大きさHは，与式より

$$H=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Ir}{4\pi(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx \quad \cdots\cdots①$$

ここで，$x=r\tan\theta$とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{r}{\cos^2\theta}$より，

$$①\Leftrightarrow\quad H=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{Ir}{4\pi r^3(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{r}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

三角比の公式 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より，

$$H=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{I}{4\pi r}(\cos\theta)\,d\theta \qquad \boxed{3}$$

$$=\frac{I}{4\pi r}\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore H=\frac{I}{2\pi r} \qquad \boxed{4}$$

(2)

ビオ・サバールの法則を用いて，求める磁界の大きさΔHは，

$$\Delta H=\frac{I}{4\pi(r^2+x^2)}\Delta l \qquad \boxed{5}$$

相似比に注目して，

$$\Delta H:\Delta H_x=\sqrt{r^2+x^2}:r$$

$$\therefore \Delta H_x=\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\Delta H$$

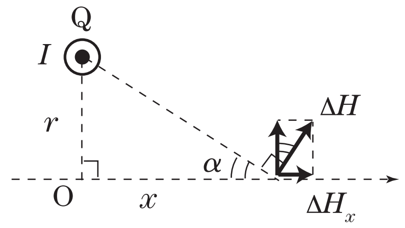
$$=\frac{Ir}{4\pi(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\Delta l$$

$$\boxed{6}$$

（別解）次の図の様に角度αを置いて，三角比より

$$\Delta H_x=\Delta H\sin\alpha=\Delta H\times\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$\therefore \Delta H_x=\frac{Ir}{4\pi(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\Delta l$$



直線電流全体が点Pに作る磁界の大きさHは，与式より

$$H=\int_{0}^{2\pi r}\frac{Ir}{4\pi(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dl$$

$\dfrac{Ir}{4\pi(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ はlに依らない定数とみなせるので，

$$H=\frac{Ir}{4\pi(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\left[l\right]_0^{2\pi r}$$

$$\therefore H=\frac{Ir^2}{2(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots\cdots②$$

$$\boxed{7}$$

原点Oに置ける磁界の強さH_0は，式②に$x=0$を代入して，

$$H_0=\frac{I}{2r}$$

$$\boxed{8}$$

(3)

点Q近傍の大きさ$n\Delta xI$の円電流が原点Oに作る磁界の大きさΔHは，式②を使用して

$$\Delta H=\frac{n\Delta xIr^2}{2(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{nIr^2}{2(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\Delta x$$

$$\boxed{9}$$

ソレノイドの電流全体が原点Oに作る磁界の大きさHは，与式より

$$H=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{nIr^2}{2(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx \quad \cdots\cdots③$$

ここで，$x=r\tan\theta$とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{r}{\cos^2\theta}$より，

③⇔ $H=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \dfrac{nIr^2}{2r^3(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\cdot\dfrac{r}{\cos^2\theta}\,d\theta$

三角比の公式 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より，

$H=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \dfrac{nI}{2}(\cos\theta)\,d\theta$ $\boxed{10}$

$=\dfrac{nI}{2}\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$

$\therefore H=nI$ $\boxed{11}$

【導出から学べる事】

電流が作る磁界について，高校教科書に載っている結論の公式は以下の３つです。

直線電流にが作る磁界の大きさ

$H_{直}=\dfrac{I}{2\pi r}$

円電流が円の中心点に作る磁界の大きさ

$H_{円}=\dfrac{I}{2r}$

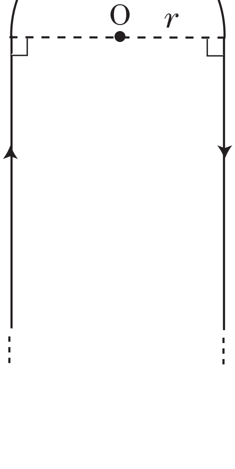
ソレノイドの電流がコイル内に作る磁界の大きさ

$H_{ソ}=nI$

上の公式について，今回の導出を通すと，更に深く理解出来る事が２点あると思います。

＜ポイント１＞

上の $H_{直}$，$H_{円}$，$H_{ソ}$ の公式は「微小電流の作る磁界の合計」である。



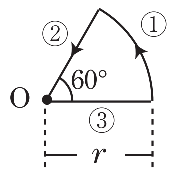
例えば，上図のような半直線２本と，半円で出来た電流が，点Ｏに作る磁界の大きさ H を問われた場合，導出を経験している人なら，「公式の半分の値を足していけば良い」と比較的容易に気づく事が出来ると思います。

$H=\dfrac{1}{2}H_{円}+\dfrac{1}{2}H_{直}\times 2$

他の例で言えば，十分に長いソレノイドコイルの電流が，コイル内の“端”に作る磁界を聞かれた場合は，先の問題 $\boxed{10}$ での積分において，積分区間を $-\infty\leqq x\leqq\infty$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ から，$0\leqq x\leqq\infty$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ に変えれば良い訳ですから，答えは $\dfrac{1}{2}H_{ソ}$ になるかと思います。

＜ポイント２＞

距離と垂直な電流成分が磁界を作る。



例えば，上図のような扇形の電流が，点Ｏに作る磁界の大きさ H を問われた場合，導出を経験している人なら，「点Ｏに磁界を作るのは円弧①の電流だけであり，辺②，③の部分は点Ｏに磁界を作らない」という点が理解出来ると思います。

$H=\dfrac{1}{6}H_{円}$

上の２つのポイントは，いずれも公式の導出を行った事が無い人には，「自分がどこがわかっていないかもわからない」状態であるため，中々理解するのは難解であるかと思います。

物理法則，公式の導出は入試本番では実際に行う時間はありませんが，普段の学習において導出を一

旦理解しておく事は，より応用的な問題を取り組む際に「目のつけどころ」が明確になる，という利点があります。電磁気以外でもそうですか，解き方が曖昧になりがちな苦手な単元などある場合は，一度公式の成り立ちをじっくりと見直してみる事が最も有意義ではないか，と思います。意識して見てください。