強者の戦略

解答編です。

スイッチで端子 1 を選んだとき

導体棒の速さが v[m/s] のときに流れる電流を I[A] として，回路のキルヒホッフの法則より，

$$vBl = RI \qquad \therefore \quad I = \frac{vBl}{R} \text{ [A]} \quad \boxed{\text{ア}}$$

十分時間が経ったときの導体棒の速さを v_f[m/s] として，「おもりと導体棒」の系の力のつりあいより，

$$Mg = \frac{v_f Bl}{R} \times B \times l \qquad \therefore \quad v_f = \frac{MgR}{(Bl)^2} \text{ [m/s]} \quad \boxed{\text{イ}}$$

スイッチで端子 2 を選んだとき

おもりを一定の速さ v_0[m/s] で引き上げるために必要な電池の電圧を V_0[V]，回路を流れる電流を I_0[A] とする。回路のキルヒホッフの法則および「おもりと導体棒」の系の力のつりあいより，

$$V_0 = v_0 Bl + RI_0$$

$$Mg = I_0 Bl$$

2 式より，

$$I_0 = \frac{Mg}{Bl} \text{ [A]} \quad , \quad V_0 = v_0 Bl + \frac{MgR}{Bl} \text{ [V]} \quad \boxed{\text{ウ}}$$

導体棒が h[m] だけ移動する間に電池がした仕事を W_V[J] とする。系のエネルギー関係（(電池の仕事) ＝（おもりと導体棒の力学的エネルギー変化）＋（抵抗で発生するジュール熱)）より，

$$W_V = Mgh + RI_0^{\,2} \times \frac{h}{v_0} = Mgh + R \times \left(\frac{Mg}{Bl}\right)^2 \times \frac{h}{v_0} = Mgh\left\{1 + \frac{MgR}{v_0 (Bl)^2}\right\} \text{ [J]} \quad \boxed{\text{エ}}$$

スイッチで端子 3 を選んだとき

導体棒とおもりの加速度の大きさを a[m/s^2] とする。問題文より a は一定であるので，手を離してから t 秒後の導体棒とおもりの速さは at[m/s] であり，おもりの落下距離は $\frac{1}{2}at^2$ [m] である。これらを用いて，手を離してから t 秒後までの系のエネルギー関係（(おもりが失った位置エネルギー）＝（おもりと導体棒の運動エネルギー増加）＋（コンデンサーの静電エネルギー増加)）より，

$$Mg \times \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(M+m)(at)^2 + \frac{1}{2}C(at \times Bl)^2 \qquad \therefore \quad a = \frac{M}{M + m + C(Bl)^2} g \text{ [m/s}^2\text{]} \quad \boxed{\text{オ}}$$

（別解）

手を離してからしばらく時間が経ったときの導体棒とおもりの速さを v[m/s]，回路を流れる電流の大

きさを I[A]，糸の張力の大きさを T[N]，コンデンサーにたくわえられた電気量を Q[C] とする。回路のキルヒホッフの法則およびおもりと導体棒の運動方程式より，

$$vBl = \frac{Q}{C} \quad \cdots \quad ①$$

$$Mg - T = Ma \quad \cdots \quad ②$$

$$T - IBl = ma \quad \cdots \quad ③$$

この状態から短い時間 Δt[s] だけ経過したときの速度の変化量を Δv[m/s]，電気量の変化量を ΔQ[C] とする。このときの回路のキルヒホッフの法則より，

$$(v + \Delta v)Bl = \frac{Q + \Delta Q}{C} \quad \cdots \quad ④$$

①，④より，

$$\Delta v \times Bl = \frac{1}{C} \times \Delta Q$$

両辺 Δt で割って，

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \times Bl = \frac{1}{C} \times \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

ここで，$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$，$I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ であるので，

$$aBl = \frac{I}{C} \quad \cdots \quad ⑤$$

②，③，⑤より I，T を消去して，

$$a = \frac{M}{M + m + C(Bl)^2} g \ [\mathrm{m/s^2}]$$

<u>スイッチで端子 4 を選んだとき</u>

短い時間 Δt[s] での速度 $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ [m/s] を用いて，回路のキルヒホッフの法則より，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \times Bl - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 \qquad \therefore \ \Delta I = \frac{Bl}{L}\Delta x \ [\mathrm{A}] \quad \boxed{カ}$$

よって，電流 I と位置 x は傾き $\dfrac{Bl}{L}$ の 1 次関数の関係にある。また，$x = 0$ [m]（手をはなした位置）で $I = 0$ [A] であるので，このことより，

$$I = \frac{Bl}{L}x \quad \cdots \quad ⑥$$

回路の電流が I[A] のときのおもりと導体棒の加速度を a[m/s^2]，糸の張力の大きさを T[N] として，おもりと導体棒の運動方程式より，

$$Mg - T = Ma \quad \cdots \quad ⑦$$

$$T - IBl = ma \quad \cdots \quad ⑧$$

⑥～⑧より I，T を消去して，

$$a = -\frac{(Bl)^2}{(M+m)L}x + \frac{Mg}{M+m} = -\left(\sqrt{\frac{(Bl)^2}{(M+m)L}}\right)^2\left\{x - \frac{MgL}{(Bl)^2}\right\} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

単振動の式（$a = -\omega^2(x - x_c)$）と比較して，

角振動数：$\omega = \sqrt{\dfrac{(Bl)^2}{(M+m)L}}$ [rad/s] $\boxed{\text{キ}}$

振動中心：$x_c = \dfrac{MgL}{(Bl)^2}$ [m]

$x = 0$ [m]（手をはなした位置）で速さ 0 であるので，この位置が単振動の端であることから，

振幅：$A = x_c - 0 = \dfrac{MgL}{(Bl)^2}$ [m] $\boxed{\text{ク}}$

いかがだったでしょうか。

本問において，同志社大学らしさが最も出ているのが空欄 $\boxed{\text{オ}}$ ではないでしょうか。加速度 a を系のエネルギー関係から解く，という解法がかなり思いつきにくいですよね。ヒントとなる部分は「一定の加速度で運動し始めた」という文章でしょうか。なぜわざわざ『一定の』と書いてくれているのだろう，というところを突き詰めると「速度や移動距離が等加速度直線運動の式で出せる→運動エネルギーや位置エネルギーの変化が出せる」という思考ルートに乗ることができ，エネルギーの解法に至ることができるかも知れませんね。ただ，このヒントからエネルギーの解法にたどりつくには高度な物理の力と読解力が必要です。同志社大学はこのような難易度の高い問題が，時には初めの方の設問から出題されることもありますので注意が必要です。なお，本問は別解のように，運動方程式とキルヒホッフの法則から解くことも可能です。解法としてはこちらの方が素直ですね。ただ，こちらはこちらで，キルヒホッフの法則の式に現れる速度 v と電気量 Q を，加速度 a と電流 I に変換する過程がやや高度です。一言で言えば，加速度と速度の関係および電流と電気量の関係が「微分の関係（$a = \dfrac{dv}{dt}$，$I = \dfrac{dQ}{dt}$）」で結ばれていることを用いるだけなのですが，ちょっと高校物理の範囲を超えている感じがします。解答では微分を前面に出さずに微小時間 Δt を用いて $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$，$I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ としましたが，どうあれ受験生に何の誘導もなしにこの発想を求めるのはなかなか高度です。しかも，この微小時間の変化量の発想は次の $\boxed{\text{カ}}$ の問題では誘導形式で出てきていますので，それよりも前にあるこの $\boxed{\text{オ}}$ で誘導なしとするのは不自然ですね。むしろ，$\boxed{\text{オ}}$ の前の $\boxed{\text{エ}}$ の解法がエネルギー関係であることを考えると，$\boxed{\text{オ}}$ の作問意図は「$\boxed{\text{エ}}$（等速直線運動）に引き続き，$\boxed{\text{オ}}$（等加速度直線運動）でも系のエネルギー関係が正しく使用できるか」だと思われます。よって，解答ではエネルギー関係を本命の解法とし，運動方程式とキルヒホッフの法則の解法は別解としました。

本日はここまで。またお会いしましょう。