強者の戦略

　第８３回に引き続き，藤原です。第８４回目は前回で紹介した問題の解説です。

　物理の入試問題で，あまり普段見慣れない設定の問題に出くわした際は，大抵の場合「解き方の方向性」が誘導文内で指示されており，真面目に勉強していた高校生が知っている知識（法則・公式）で解ける様に配慮されています。

　よって，斬新な設定の問題に対する一般的な対処法は「焦らずに問題文を読むかえす事」に尽きます。

　ただ残念ながら，「焦らず読む」というやり方でいつでも対処出来るかというと，教科書には詳しく載っていないが，応用的な物理テーマとして背景を事前に知っておいた方が良いテーマも記述試験で度々見られます。入試物理を指導する側としては，過去の入試問題から，そのような応用テーマをピックアップ➡体系化して，生徒に伝える事も意識しながら授業に向かっています。

　今回の問題の後半に出題されている「リサジュー図形」も，初めて出会った人は問題文から何をやらせたいのかが読み取りにくかったと思います。

　すごく頻出の問題，というわけではありませんが事前に知っておかないと解くのが難しい問題の一例として，この頁で紹介しました。

　では，解説を見て行きましょう。

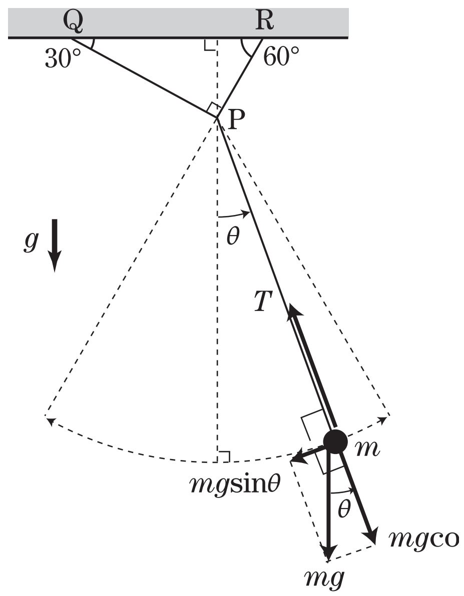
【解答解説】

設問 (1)

　力学的エネルギー保存則（点 P を重力の位置エネルギーの基準点とする）より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(-b\cos\theta) = mg\{-b\cos(-30^\circ)\}$$
$$\therefore v = \sqrt{gb(2\cos\theta - \sqrt{3})}$$

設問 (2)



　設問 (1) の角度 θ の位置において，円運動する小球 A が受ける外力の，円の中心方向の運動方程式より，

$$m\frac{v^2}{b} = T - mg\cos\theta$$

設問 (1) の値を代入して v 消去して T を求めると，

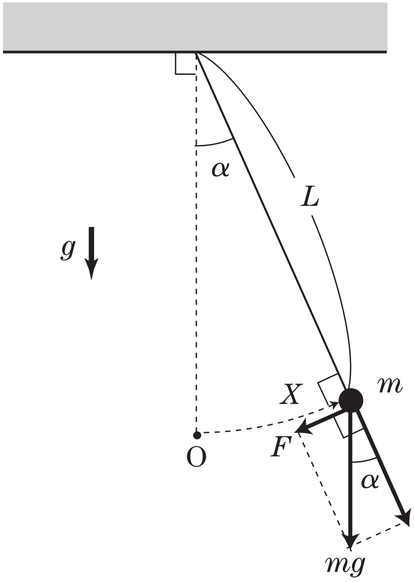
$$T = (3\cos\theta - \sqrt{3})mg$$

この式より，運動範囲 $-30^\circ \leqq \theta \leqq 30^\circ$ において，

　$\theta = 0^\circ$ のとき T は最大値 $T_{\max} = (3 - \sqrt{3})mg$

　$\theta = 0^\circ$，30° のとき T は最小値 $T_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$

設問 (3)



上図において，点 O を通る鉛直線とひものなす角度 α[rad] とすると，$\alpha = \dfrac{X}{L}$ であるので，小球が受ける外力の円の接線方向の成分（X の向きを正とする）は，$F = -mg\sin\dfrac{X}{L}$ である。

$\boxed{\text{あ}}$ （ク）

ここで，X が L に比べて十分小さいとき，$\alpha = \dfrac{X}{L}$ は微小角となり，微小角 [rad] における近似式を用いて $\sin\alpha \fallingdotseq \alpha \ \Leftrightarrow\ \sin\dfrac{X}{L} \fallingdotseq \dfrac{X}{L}$ と置き換えて $F \fallingdotseq -\dfrac{mg}{L}X$ と表す事が出来る。

$\boxed{\text{い}}$ （イ）

円の接線方向の加速度を a として，

$$\text{運動方程式}\quad ma = -\frac{mg}{L}X \qquad \cdots\cdots（※）$$

これは，ばね定数 k のばねによる滑らかな水平ばね運動 $ma=-kX$ と同様に，加速度 a が変位 X によって一次関数的に変化する単振動を表している。

よってこの小振り子運動は，ばね定数 $k = \dfrac{mg}{L}$ のばね振動と同様の運動をする。

$\boxed{\text{う}}$ （エ）

なお（※）⇔ $a = -\dfrac{g}{L}X$ より，単振動の式 $a = -\omega^2 X$ と比較して，この図 4 の小振り子の単振動は，

角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$，周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ となる。

一方で大きい振幅で運動する振り子運動（X が L より十分小さくない範囲も運動する）の場合，運動中に上の近似は常には成り立たない。

α（>0）が微小角でないとき，

$$\sin\alpha < \alpha \Leftrightarrow \quad \sin\frac{X}{L} < \frac{X}{L}$$

となり，円の接線方向の復元力 $F = -mg\sin\dfrac{X}{L}$ の大きさについて，

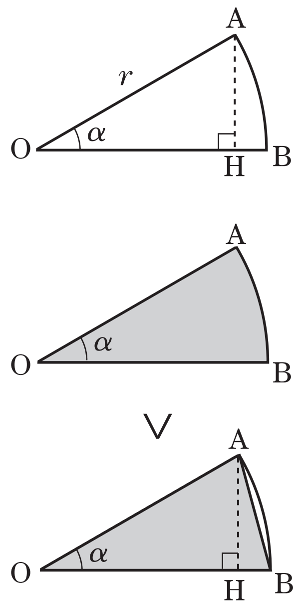
$$mg\sin\frac{X}{L} < \frac{mg}{L}X$$

となり，復元力 F の大きさが，α が微小角より大きい位置では小振り子のときより小さくなるため，加速度（速度変化）の大きさも小さくなる。

以上より，小振り子の振動（式※）と比較して，振幅が大きいときの振動は，角速度 ω がより小さく，周期 T がより大きい（長い）運動となる。

$\boxed{\text{え}}$ （サ）

＜設問 (3)：参考＞



$\boxed{\text{い}}$ では近似，$\boxed{\text{え}}$ では大小関係が問われていましたが，ここでは少し数学的な力が必要となります。

図のような半径 r，中心角 α の扇型 OAB と三角形 OAB（点 H は点 A から線分 OB に下ろした垂線の足）の面積を比較すると，

扇型の面積　＞　三角形の面積

$$\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{OB}\times\mathrm{AH}\right)$$

であるので，

$$\pi r^2\times\frac{\alpha}{2\pi} > \frac{1}{2}\,r\times r\sin\alpha \quad \Leftrightarrow \alpha > \sin\alpha$$

となる。また，α が微小角（非常に 0 に近い）ときは，面積が非常に近い値となり，

$$\pi r^2\times\frac{\alpha}{2\pi} \fallingdotseq \frac{1}{2}\,r\times r\sin\alpha \quad \Leftrightarrow \alpha \fallingdotseq \sin\alpha$$

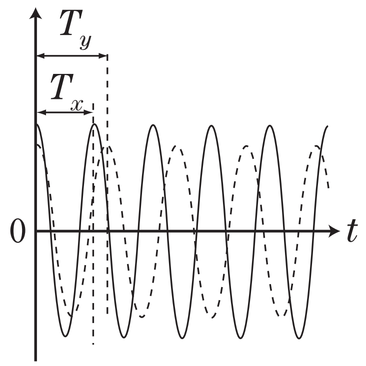
と近似出来る。

設問 (4)

設問 (3) より，小振り子における周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ は，ひもの長さ L（ひもの固定点から小球までの長さ），で決まる。

今回，x 方向の小振り子のひもの長さを $L_x(=b)$，周期 $T_x = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_x}{g}}$，$y$ 方向の小振り子のひもの長さを $L_y(=b+c')$，周期 $T_y = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_y}{g}}$ とすると，$L_x<L_y$ より，$T_x<T_y$ となっているグラフ（エ）を選ぶのが最も適切である。

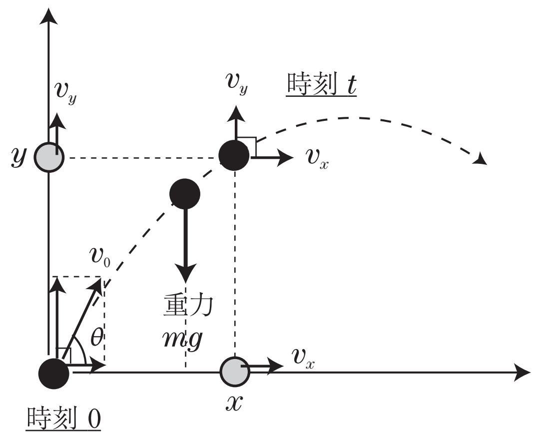
（エ）



＜設問 (4)(5)：参考＞

(4) 以降では「x 方向の振動」「y 方向の振動」が登場しますが，これは慣れていない人は非常にイメージしにくかったと思います。

「2 方向の運動」について，最も慣れているであろう「放物運動」を例にとって，考え方をまとめたいと思います。



（放物運動）

水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとり，x 軸に対して角度 θ の向きに初速度 v_0 で出発した質量 m の小球のその後の運動を予測するとき，時刻 t と共に曲線上をどのように動くかを簡単な式で予測する事は出来ない。

このとき，上図の様に x，y 軸上に出来る「小球の影」の様なもの（射影と呼ぶ）を考えれば，この影

の位置は，時刻 t によってどのように変化するかは，簡単な式で予測する事が出来る。

小球の出発点を原点，出発の時刻を 0 とし，出発後の x 方向の加速度 a_x, y 方向の加速度 a_y とすると，空気抵抗を無視した場合，

x 方向の運動方程式　$ma_x=0$（外力なし）より，

加速度　　$a_x=0$，よって時刻 t における

速度　　$v_x=v_0\cos\theta+0t$

位置（座標）$x=(v_0\cos\theta)t+\dfrac{1}{2}0t^2$　……①

y 方向の運動方程式　$ma_y=-mg$ より，

加速度　　$a_y=-g$，よって時刻 t における

速度　　$v_y=v_0\sin\theta-gt$

位置（座標）$y=(v_0\sin\theta)t-\dfrac{1}{2}gt^2$　……②

となる。また，式，から t を消去すれば，小球がたどる軌跡

$$y=-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x^2+(\tan\theta)x$$

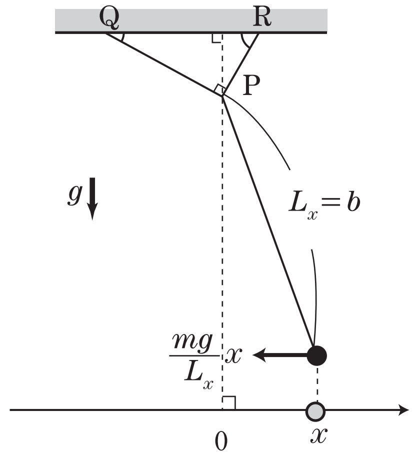
も導かれ，これは放物線を表す。

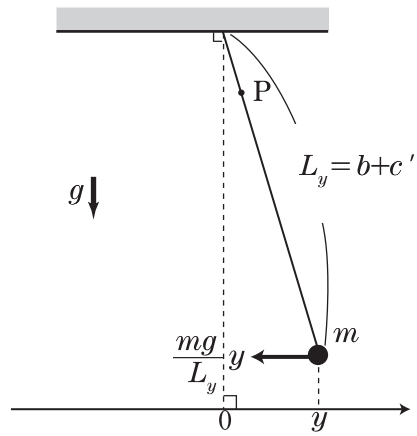
ここで最も重要なのは，「y 方向に働く重力が，x 方向の運動を変化させる事は決してない。」という点である。

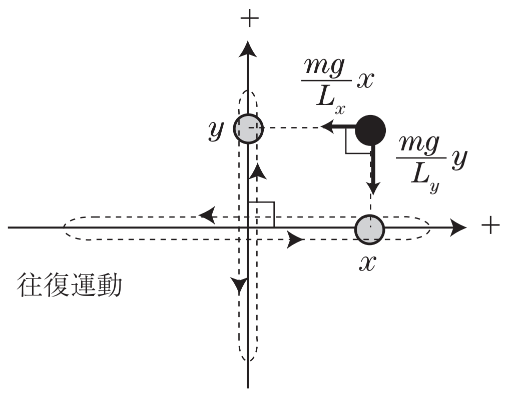
この考え方は放物運動だけでなく，全ての運動で成り立つ。

ある物体の運動を，直交座標上で 2 軸（3 軸）に分けて見る場合，それぞれの向きの外力と運動は，独立して考えて（予測計算して）良い。

これを今回の問題に当てはめてみたのが次の図です。糸につながれて水平面上を曲線的に揺れ動く小球の運動を，水平面上に x 軸，y 軸を引いて，2 方向に分けて考えています。







(小球が運動する水平面)

設問 (3) までの考察も用いると，x 方向，y 方向の運動方程式がそれぞれ

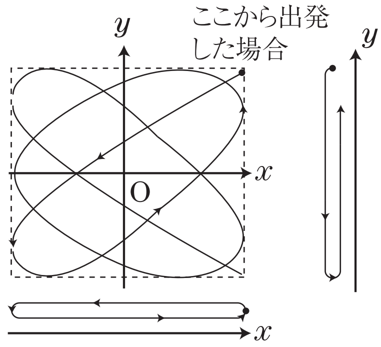
$$ma_x=-\frac{mg}{L_x}x,\quad ma_y=-\frac{mg}{L_y}y$$

と表されるので，2 方向に分けた小球の射影は，それぞれ単振動で動く事が予測される。

設問 (5)

(4) より，x 方向の周期より，y 方向の周期の方が長いため，小球が x 方向に一往復したときに，y 方向は一往復出来ない。

（イ）



その条件を満たすグラフ（イ）を選ぶのが最も適切である。

了

【最後に】

2 方向に独立した単振動を行っている場合の物体の軌跡を「リサジュー図形」と呼びます。過去の入試問題ではばね振動での出題を見かけた事があります。ただ，頻出ではないので，探すのはなかなか困難だと思います。

エッセンスとしては，平面上を曲線運動をしている物体の運動解析において，「軸を分けて射影の運動を考える。」といった手法が重要，という点です。心にとどめておいて貰えたら，と思います。