

強者の戦略

2025 年度 京大物理 第 1 問〔問題編〕

今回は 2025 年度の京大の第 1 問を解説したいと思います。京大で頻出の重心を用いた 2 体運動の分析に関する問題ですが、重心の周りの円運動の問題は私が知っている限り京大では初めてだと思います。ぜひチャレンジしてみてください。

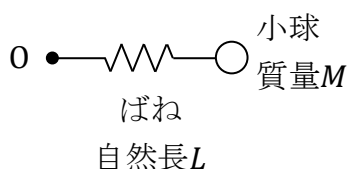
物理問題 I

次の文章を読んで、に適した式または数値を、{ }からは適切なものを一つ選びその番号を、それぞれの解答欄に記入せよ。また、問 1 では、指示にしたがって、解答を解答欄に記入せよ。ただし、円周率を π 、重力加速度の大きさを g とする。

- (1) 図 1 (a)のような自然長 L で質量が無視できるばねの一端に、質量 M で大きさが無視できる小球を取り付けた。このばねのばね定数は k である。一体となったばねと小球を、なめらかな水平平面上に置き、小球が付いていない方のばねの端を、水平平面上の点 O に固定した。ばねは点 O のまわりを自由に回転できる。

水平平面上で、小球を点 O のまわりで、ある一定の角速度 ω ($\omega > 0$)で等速円運動させたとき、ばねは伸びて、図 1 (b)のように点 O から小球までの距離が R であった。ばねの復元力により小球は点 O の方向へ大きさの力がかかっている。また小球には点 O から遠ざかる方向へ大きさの遠心力がかかっている。反対の方向へ働くこれらの力の大きさは、いずれも点 O から小球までの距離に依存する。すなわち、角速度が ω の場合に、両者の大きさが等しくなる点 O から小球までの距離が R であり、それは k , M , L , ω を用いてと表される。

- 問 1 図 1 (b)の小球が等速円運動を行うための条件を導出し、角速度 ω ($\omega > 0$)の範囲で示せ。



なめらかな水平平面上
(a)

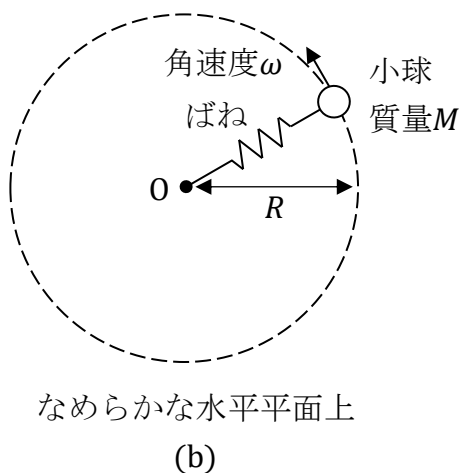


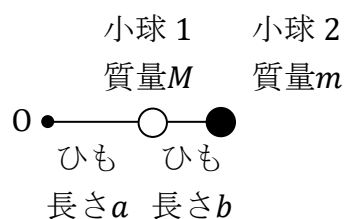
図 1

強者の戦略

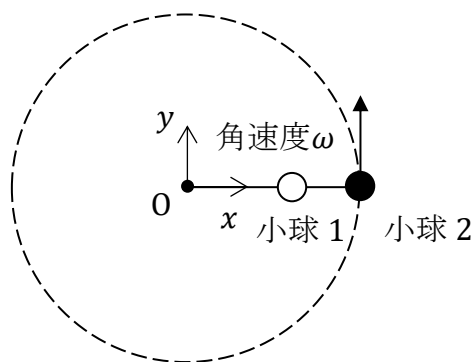
(2) 図2(a)のように、質量が無視できる軽くて伸び縮みしない長さ a のひもの一端を、なめらかな水平面上の点 O に固定した。また、このひものもう一方の端に、質量 M で大きさが無視できる小球1を取り付けた。小球1にはさらに、質量が無視できる軽くて伸び縮みしない長さ b のひもの一端を取り付け、そのひもの他端には質量 m で大きさが無視できる小球2を取り付けた。

はじめ、2つの小球と2本のひもは、一直線上に連結されたまま、なめらかな水平面上で、点 O を中心とする角速度 ω の等速円運動をしていた。図2(b)中に示す通り、点 O を座標原点とし、水平面上のある方向に x 軸を、それと垂直な方向に y 軸をとる。回転している小球2の座標が $(x, y) = (a + b, 0)$ のとき(図2(b))、長さ a のひもが切れた。切れた瞬間の時刻を $t = 0$ とする。なお切れた後のひもは、その後の2つの小球の運動には影響を与えないものとする。

長さ b のひもで連結された2つの小球の運動に注目する。ひもが切れた直後の2つの小球の重心の位置は $(x, y) = (\text{エ}, \text{オ})$ である。このとき重心から見た小球1の相対速度の大きさは カ であり、その向きは{キ: ① x 軸正の方向, ② x 軸負の方向, ③ y 軸正の方向, ④ y 軸負の方向}である。重心から見た小球2の相対速度の大きさや向きも、小球1のそれらと同様に求めることができる。小球1と小球2を連結する長さ b のひもにかかっている張力は ク であり、2つの小球は重心まわりを角速度 ケ で回転する。また、重心の運動は2つの小球の質量が重心に集中したものとして考えることができる。重心にかかる加速度の大きさは コ であることから、重心は{サ: ①円運動, ②直線運動, ③単振動}することがわかる。



なめらかな水平面上
(a)



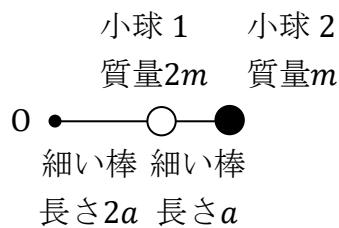
なめらかな水平面上
(b)

図2

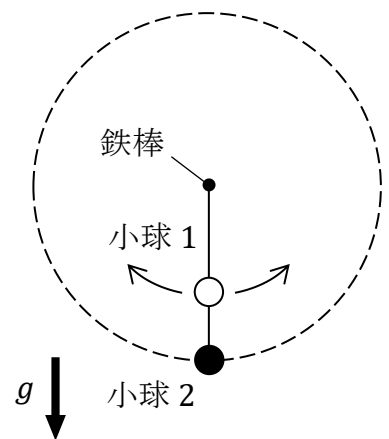
強者の戦略

(3) 図3(a)のような、質量が無視できる2本の変形しない細い棒と、大きさが無視できる2つの小球が連結された物体Aを作製した。まず長さ $2a$ の細い棒の一端に質量 $2m$ の小球1を接着した。小球1にはさらに、長さ a の細い棒の一端を固定し、さらにその細い棒の他端には質量 m の小球2を固定した。長さ $2a$ の細い棒と長さ a の細い棒は、それぞれの軸の延長線が完全に一致している。

水平な地面からある高さの位置に、地面に平行に設置されたまっすぐで細い鉄棒がある。さきに作製した物体Aを構成する細い棒の、いずれの小球とも接続されていない一端を、この鉄棒に垂直に取り付けた。図3(b)は、物体Aを取り付けた点を含む鉄棒に垂直な平面を、鉄棒の軸方向から見た図である。連結された物体Aは、鉄棒に垂直なこの平面内で、鉄棒のまわりを自由に回転できる。



(a)



(b)

図3

強者の戦略

はじめ、物体 A が図 4 (a) のように地面と平行となるように保持されている。座標原点 0 を鉄棒の位置にとり、そこから小球 2 の方向を x 軸正の方向、鉛直上方を y 軸正の方向とする。また図 4 (a) 中に示す通り、 x 軸からの回転角を θ (反時計回りを正、単位はラジアン) で表す。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とし、たとえば y 軸正の方向は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で表される。

物体 A が $\theta = 0$ の位置にあるとき、鉛直上方へ向かう初速度を小球 2 に与えた。小球 2 の初速度を V_0 とすると、このとき物体 A のもつ運動エネルギーは と書ける。また、 $y = 0$ を位置エネルギーの基準高さとする、初速度を与えられたのち、物体 A が回転して回転角が θ となったときに、物体 A がもつ位置エネルギーは と書ける。

以下では $V_0 = 3\sqrt{ag}$ として、 V_0 を用いずに解答せよ。

物体 A が初めて $\theta = \frac{3\pi}{2}$ の位置に到達する直前には、物体 A は図 4 (a) の方向から見たとき {セ : ①時計回り、②反時計回り} に回転している。

物体 A が $\theta = \frac{3\pi}{2}$ の位置に到達したとき、その回転の角速度の大きさは である。

このとき、接着してあった長さ $2a$ の細い棒と小球 1 の連結部が一瞬で外れた。連結が外れた瞬間の時刻を $t = 0$ とする。長さ a の細い棒で連結された 2 つの小球の、 $t > 0$ での運動を考える。 $t > 0$ で初めて小球 2 が小球 1 の鉛直下方に到達したとき、ちょうど小球 2 が地面に接した。(図 4 (b))。よって地面を基準として、鉄棒の高さは であると求められる。

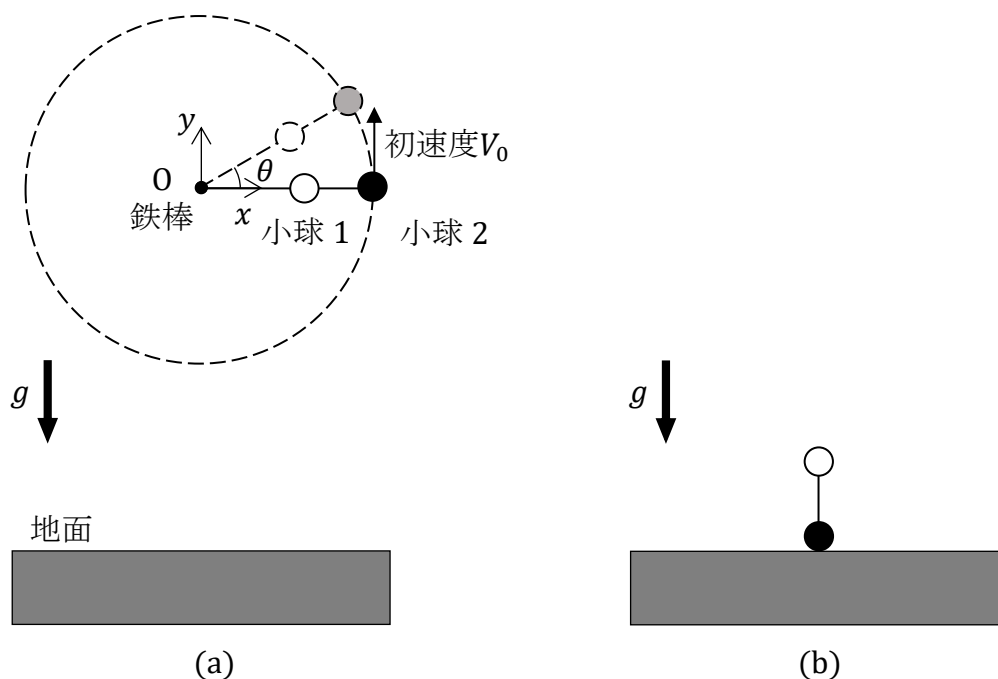


図 4

強者の戦略

2025 年度 京大物理 第 1 問 [解答解説編]

【解答】

(1)

$$\boxed{\text{ア}} : k(R - L) \quad \boxed{\text{イ}} : MR\omega^2 \quad \boxed{\text{ウ}} : \frac{k}{k - M\omega^2}L$$

問 1 図 1 (b) の小球が等速円運動を行うための条件は $R > 0$ より

$$\frac{k}{k - M\omega^2}L > 0 \quad \therefore \omega < \sqrt{\frac{k}{M}}$$

となる。

(2)

$$\boxed{\text{エ}} : a + \frac{m}{M + m}b \quad \boxed{\text{オ}} : 0 \quad \boxed{\text{カ}} : \frac{m}{M + m}b\omega \quad \{ \text{キ} \} : \textcircled{4}$$

$$\boxed{\text{ク}} : \frac{Mm}{M + m}b\omega^2 \quad \boxed{\text{ケ}} : \omega \quad \boxed{\text{コ}} : 0 \quad \{ \text{サ} \} : \textcircled{2}$$

(3)

$$\boxed{\text{シ}} : \frac{17}{18}mV_0^2 \quad \boxed{\text{ス}} : 7mg\sin\theta \quad \{ \text{セ} \} : \textcircled{2} \quad \boxed{\text{ソ}} : \sqrt{\frac{31g}{17a}}$$

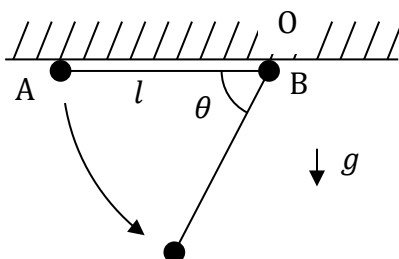
$$\boxed{\text{タ}} : \left(\frac{34}{31}\pi^2 + 3 \right)a$$

【解説】

「重心運動」と「相対運動」を考えることで「2 体運動」を分析する問題は京都大学で頻出ですが、今までは 1 次元（直線上）のものばかりでした。この問題でついに 2 次元（平面上）の問題が出題されたことになります。平面上で重心が等速直線運動もしくは等加速度運動をしてその重心のまわりをそれぞれの物体が等速円運動をする問題は、既に東京大学や京都府立医科大学で出題されています。問題の全てを掲載すると量が多くなるので、図のみ掲載してその概略をお伝えしましょう。

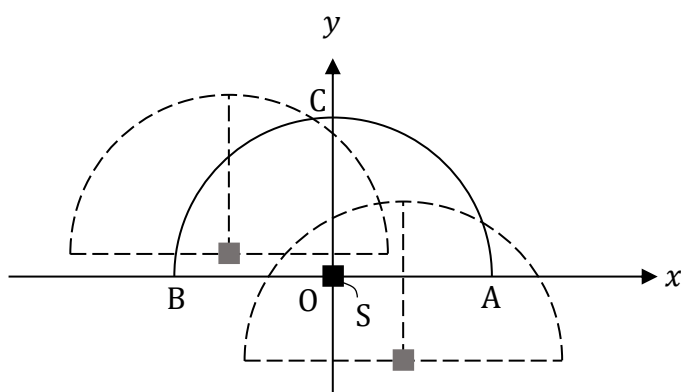
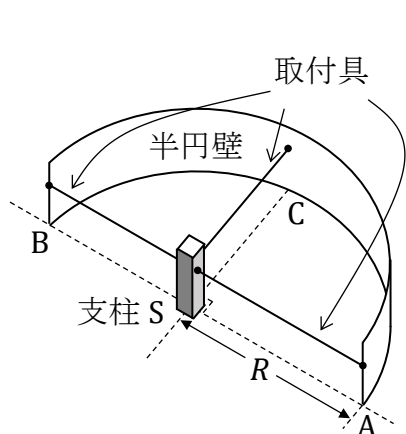
まずは、2015 年の東京大学の問題では、以下の図のようなひもでつながれた小球 A、B の重心が等加速度運動（加速度は鉛直下向きに g ）をしてその重心のまわりを小球 A、B が等速円運動をする問題となっています。

強者の戦略



以前、私は東京大学で出題されたこの問題を京都大学の問題のような誘導穴埋め形式に改題して「京大スパルタン」で使用したことがあるのですが、今は東京大学の問題の改題が禁じられているなどの事情で、この改題問題は使用していません。その代わりという訳ではありませんが、2025 年度の入試を受験した高3 生向けの直前講習「京大物理ファイナル」では、糸で結ばれた 2 つの点電荷の重心が水平面上で等速直線運動をしてその重心のまわりをそれぞれの物体が等速円運動をする問題を出題しました。この問題は藤原先生が作成した問題なのですが、まさに的中ですね！今まで出題されることがないテーマを的中させるのはなかなかできることではないです。素晴らしいです!!

次に、2016 年の京都府立医科大学の問題では、以下のような図が掲載されていて、重心が水平面上で等速直線運動をしてその重心のまわりをそれぞれの物体が等速円運動をする問題となっています。



強者の戦略

この問題は、半円壁と支柱を取付具で取り付けた物体に小球が衝突する問題なのですが、物体が固定されている場合、物体が水平面上を y 軸方向のみになめらかに運動できる場合、物体が水平面上を自由になめらかに運動できる場合の設問があって、しかも半円壁の右端の点 A から小球が進む場合、半円壁の端以外の点から小球が衝突する場合があるという、完答するには膨大な時間が必要な問題です。2010 年代の京都府立医科大学の物理の入試問題は難易度が高いものが多かったのですが、この問題はその中でもトップクラスと質の高さと量の多さで、受験生泣かせの問題だと思います。試験本番では程々のところで切り上げ、他の問題で点数を稼ぐべきなのですが、力学の実力に自信がある人は是非チャレンジしてみてください。ただし、自分の実力に自信があってチャレンジしたからには、泣き言はなしですよ笑。なかなかの難問です。

前置きが長くなったので、そろそろ本題の 2025 年度の京都大学の第 1 問の解説です。

(1) ここは失点できないところです。

点 O から小球までの距離が R であるとき、ばねの復元力により小球には点 O の方向へ大きさ $k(R - L)$ の力がかかっている、小球と共に回転する座標系から見ると小球には点 O から遠ざかる方向へ大きさ $MR\omega^2$ の遠心力がかかっているように見えます。小球と共に回転する座標系から見た円の半径方向の力のつりあいの式を立て、 R を求めると

$$MR\omega^2 = k(R - L) \quad \therefore R = \frac{k}{k - M\omega^2} L$$

となります。研伸館の物理の授業では「遠心力」などの「慣性力」を用いる場合は観測する立場を明示するようにしていますが、入試問題では観測する立場が明示されていないことがしばしばあるので、そこは文章をよく読んで判断しましょう。ちなみに上記の式は、慣性系（静止系）から見た円の半径方向の運動方程式と考えることができます。

問 1 図 1 (b) の小球が等速円運動を行うための条件は $R > 0$ より

$$\frac{k}{k - M\omega^2} L > 0 \quad \therefore \omega < \sqrt{\frac{k}{M}}$$

となります。

強者の戦略

(2) ここからいよいよこの問題のメインテーマとなります。

まずは、長さ a のひもが切れた直後について考えます。このときの小球 1, 小球 2 の位置 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) は

$$x_1 = a$$

$$y_1 = 0$$

$$x_2 = a + b$$

$$y_2 = 0$$

となるので、その重心の位置 (x_G, y_G) は

$$x_G = \frac{Mx_1 + mx_2}{M + m} = a + \frac{m}{M + m}b$$

$$y_G = \frac{My_1 + my_2}{M + m} = 0$$

となります。同様にして、このときの小球 1, 小球 2 の速度 (v_{1x}, v_{1y}) , (v_{2x}, v_{2y}) は

$$v_{1x} = 0$$

$$v_{1y} = a\omega$$

$$v_{2x} = 0$$

$$v_{2y} = (a + b)\omega$$

となるので、その重心の速度 (v_{Gx}, v_{Gy}) は

$$v_{Gx} = \frac{Mv_{1x} + mv_{2x}}{M + m} = 0$$

$$v_{Gy} = \frac{Mv_{1y} + mv_{2y}}{M + m} = a\omega + \frac{m}{M + m}b\omega$$

となります。そして、重心から見た小球 1, 小球 2 の相対速度 (v_{R1x}, v_{R1y}) , (v_{R2x}, v_{R2y}) は

$$v_{R1x} = v_{1x} - v_{Gx} = 0$$

$$v_{R1y} = v_{1y} - v_{Gy} = -\frac{m}{M + m}b\omega$$

$$v_{R2x} = v_{2x} - v_{Gx} = 0$$

$$v_{R2y} = v_{2y} - v_{Gy} = \frac{M}{M + m}b\omega$$

となります。よって、このとき重心から見た小球 1, 小球 2 の相対速度の大きさ v_{R1} , v_{R2} は

$$v_{R1} = \sqrt{v_{R1x}^2 + v_{R1y}^2} = \frac{m}{M + m}b\omega$$

$$v_{R2} = \sqrt{v_{R2x}^2 + v_{R2y}^2} = \frac{M}{M + m}b\omega$$

となり、その向きはそれぞれ y 軸負の方向, y 軸正の方向となります。

強者の戦略

ここからは、長さ a のひもが切れた後の2つの小球の運動についての考察になります。長さ a のひもが切れた後の2つの小球の運動は、「2つの小球の重心が等速直線運動をして、その重心の周りを2つの小球がそれぞれ等速円運動する」というものになります。この「重心が等速直線運動（もしくは等加速度運動）をして、その重心の周りをそれぞれが等速円運動する」タイプの問題の解説のほとんどはこの事実を前提とした解説となっているのですが、その理由を知りたい人も少なからずいるはずで、2015年に東京大学で出題された問題の解説動画をたまたま見つけたのですが、その動画に対するコメント欄の一番最初のところに「重心の周りをそれぞれが等速円運動する」のが分からないというものがありました。以前、私自身も2016年の京都府立医科大学の問題の解説を書いたときに、他の設問に対する解説の量が膨大になってしまったこともあり、その解説を書けずすっきりしない気分になったことがあります。せっかくの機会なので、今回は最後のところで(2), (3)合わせて説明してみたいと思います。そこはもう少しお待ちいただくとして、解説を続けます。

重心から見た小球1, 小球2の等速円運動の半径 r_{R1} , r_{R2} は

$$r_{R1} = x_G - x_1 = \frac{m}{M+m}b$$

$$r_{R2} = x_2 - x_G = \frac{M}{M+m}b$$

となります。小球1と小球2を連結する長さ b のひもにかかっている張力の大きさを T として、重心から見た小球1, 小球2の等速円運動の中心方向の運動方程式は

$$\text{小球1: } M \frac{v_{R1}^2}{r_{R1}} = T$$

$$\text{小球2: } m \frac{v_{R2}^2}{r_{R2}} = T$$

となります。 v_{R1} , r_{R1} , v_{R2} , r_{R2} を代入すると

$$\text{小球1: } M \frac{\left(\frac{m}{M+m}b\omega\right)^2}{\frac{m}{M+m}b} = T$$

$$\text{小球2: } m \frac{\left(\frac{M}{M+m}b\omega\right)^2}{\frac{M}{M+m}b} = T$$

となり、これらのどちらから

$$T = \frac{Mm}{M+m}b\omega^2$$

となります。

強者の戦略

重心から見た小球 1, 小球 2 の等速円運動の角速度の方は, その角速度を ω_R として, 円運動の速度と角速度の関係を考えると

$$\text{小球 1: } v_{R1} = r_{R1}\omega_R$$

$$\text{小球 2: } v_{R2} = r_{R2}\omega_R$$

となります。 v_{R1} , r_{R1} , v_{R2} , r_{R2} を代入すると

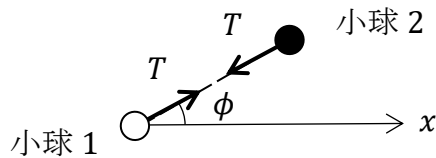
$$\text{小球 1: } \frac{m}{M+m}b\omega = \left(\frac{m}{M+m}b\right)\omega_R$$

$$\text{小球 2: } \frac{M}{M+m}b\omega = \left(\frac{M}{M+m}b\right)\omega_R$$

となり, これらのどちらからとも

$$\omega_R = \omega$$

となります。



最後は, 重心自体の運動についての考察です。図のように, 長さ b のひもが x 軸方向となす角を ϕ とし, 小球 1 の加速度の x 成分, y 成分をそれぞれ a_{1x} , a_{1y} , 小球 2 の加速度の x 成分, y 成分をそれぞれ a_{2x} , a_{2y} として, 運動方程式は

$$\text{小球 1 の } x \text{ 方向: } Ma_{1x} = T\cos\phi$$

$$\text{小球 1 の } y \text{ 方向: } Ma_{1y} = T\sin\phi$$

$$\text{小球 2 の } x \text{ 方向: } ma_{2x} = -T\cos\phi$$

$$\text{小球 2 の } y \text{ 方向: } ma_{2y} = -T\sin\phi$$

となります。よって, 重心の加速度(a_{Gx} , a_{Gy})は

$$a_{Gx} = \frac{Ma_{1x} + ma_{2x}}{M+m} = 0$$

$$a_{Gy} = \frac{Ma_{1y} + ma_{2y}}{M+m} = 0$$

となるので, 重心の加速度の大きさ a_G は

$$a_G = \sqrt{a_{Gx}^2 + a_{Gy}^2} = 0$$

となり, 重心は等速直線運動することがわかります。

強者の戦略

(3) 最後の「タ」以外は確実に正解したいところです。

まずは、物体 A が $\theta = 0$ の位置にあるときについて考えます。このときの物体 A の鉄棒のまわりの回転の角速度の大きさを ω_0 、小球 1 の初速度を v_0 とし、円運動の速度と角速度の関係を考えると

$$v_0 = (2a)\omega_0$$

$$V_0 = (3a)\omega_0$$

となり、これらより

$$\omega_0 = \frac{V_0}{3a}$$

$$v_0 = \frac{2}{3}V_0$$

となります。よって、このときの物体 A のもつ運動エネルギー K_0 は

$$K_0 = \frac{1}{2}(2m)v_0^2 + \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{2}{3}V_0\right)^2 + \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{17}{18}mV_0^2$$

となります。次に、初速度を与えられたのち、物体 A が回転して回転角が θ となったときについて考えます。 $y = 0$ を位置エネルギーの基準高さとするとき、このとき物体 A がもつ位置エネルギー $U(\theta)$ は

$$U(\theta) = (2m)g(2a \sin \theta) + mg(3a \sin \theta) = 7mga \sin \theta$$

となります。また、初速度の与え方から $\theta = \frac{3\pi}{2}$ の位置に到達する直前の小球 1、小球 2

の速度は共に x 軸の正方向となります。よって、物体 A が初めて $\theta = \frac{3\pi}{2}$ の位置に到達する直前には、物体 A は図 4(a) の方向から見たとき反時計回りに回転しています。物体 A が $\theta = \frac{3\pi}{2}$ の位置に到達したときの回転の角速度の大きさを ω とし、力学的エネルギー保存より

$$K_0 + U(0) = \left[\frac{1}{2}(2m)\{(2a)\omega\}^2 + \frac{1}{2}m\{(3a)\omega\}^2 \right] + U\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

となりますが、 $U(0) = 0$ 、 $U\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -7mga$ 、 $V_0 = 3\sqrt{ag}$ のとき $K_0 = \frac{17}{2}mga$ より

$$\frac{17}{2}mga + 0 = \frac{17}{2}ma\omega^2 + (-7mga) \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{31g}{17a}}$$

となります。

強者の戦略

最後の設問が少し難しいです。まず、連結が外れた瞬間について考えます。このとき
の小球 1, 小球 2 の速度 (v_{1x}, v_{1y}) , (v_{2x}, v_{2y}) は

$$v_{1x} = (2a)\omega$$

$$v_{1y} = 0$$

$$v_{2x} = (3a)\omega$$

$$v_{2y} = 0$$

となるので、その重心の速度 (v_{Gx}, v_{Gy}) は

$$v_{Gx} = \frac{(2m)v_{1x} + mv_{2x}}{2m + m} = \frac{7}{3}a\omega$$

$$v_{Gy} = \frac{(2m)v_{1y} + mv_{2y}}{2m + m} = 0$$

となります。そして、重心から見た小球 1, 小球 2 の相対速度 (v_{R1x}, v_{R1y}) , (v_{R2x}, v_{R2y})
は

$$v_{R1x} = v_{1x} - v_{Gx} = -\frac{1}{3}a\omega$$

$$v_{R1y} = v_{1y} - v_{Gy} = 0$$

$$v_{R2x} = v_{2x} - v_{Gx} = \frac{2}{3}a\omega$$

$$v_{R2y} = v_{2y} - v_{Gy} = 0$$

となります。よって、このとき重心から見た小球 1, 小球 2 の相対速度の大きさ v_{R1} , v_{R2}
は

$$v_{R1} = \sqrt{v_{R1x}^2 + v_{R1y}^2} = \frac{1}{3}a\omega$$

$$v_{R2} = \sqrt{v_{R2x}^2 + v_{R2y}^2} = \frac{2}{3}a\omega$$

となり、その向きはそれぞれ x 軸負の方向, x 軸正の方向となります。また、重心から見た
小球 1, 小球 2 の円運動の半径 r_{R1} , r_{R2} は

$$r_{R1} = \frac{m}{2m + m}a = \frac{1}{3}a$$

$$r_{R2} = \frac{2m}{2m + m}a = \frac{2}{3}a$$

となります。このとき 2 つの小球の重心まわりの運動の角速度を ω_R として、円運動の速
度と角速度の関係を考えると

$$\text{小球 1 : } v_{R1} = r_{R1}\omega_R$$

$$\text{小球 2 : } v_{R2} = r_{R2}\omega_R$$

強者の戦略

となります。 v_{R1} , r_{R1} , v_{R2} , r_{R2} を代入すると

$$\text{小球 1} : \frac{1}{3}a\omega = \left(\frac{1}{3}a\right)\omega_R$$

$$\text{小球 2} : \frac{2}{3}a\omega = \left(\frac{2}{3}a\right)\omega_R$$

となり、これらのどちらから

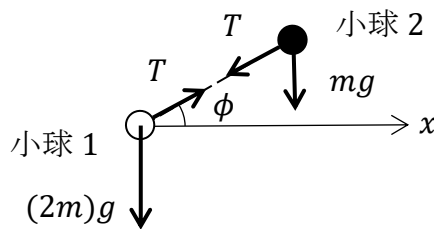
$$\omega_R = \omega$$

となります。

$t > 0$ で初めて小球 2 が小球 1 の鉛直下方に到達するのは、重心から見た小球 1、小球 2 の等速円運動の 1 周期後で、その時刻 t_0 は

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_R} = \frac{2\pi}{\omega}$$

となります。



次に、連結が外れた後の重心自体の運動についての考察です。図のように、長さ a のひもが x 軸方向となす角を ϕ とし、小球 1 の加速度の x 成分、 y 成分をそれぞれ a_{1x} , a_{1y} , 小球 2 の加速度の x 成分、 y 成分をそれぞれ a_{2x} , a_{2y} として、運動方程式は

$$\text{小球 1 の } x \text{ 方向} : (2m)a_{1x} = T\cos\phi$$

$$\text{小球 1 の } y \text{ 方向} : (2m)a_{1y} = T\sin\phi - (2m)g$$

$$\text{小球 2 の } x \text{ 方向} : ma_{2x} = -T\cos\phi$$

$$\text{小球 2 の } y \text{ 方向} : ma_{2y} = -T\sin\phi - mg$$

となります。よって、重心の加速度 (a_{Gx}, a_{Gy}) は

$$a_{Gx} = \frac{(2m)a_{1x} + ma_{2x}}{2m + m} = 0$$

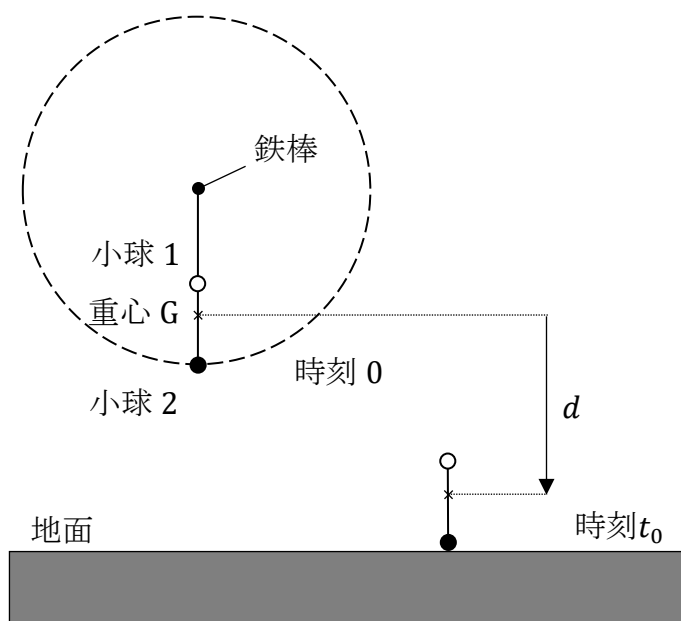
$$a_{Gy} = \frac{(2m)a_{1y} + ma_{2y}}{2m + m} = -g$$

となるので、重心の加速度の大きさ a_G は

$$a_G = \sqrt{a_{Gx}^2 + a_{Gy}^2} = g$$

となり、その向きは y 軸負の方向となり、重心は等加速度運動することがわかります。

強者の戦略



以上より, 時刻 $t = 0$ から $t > 0$ で初めて小球 2 が小球 1 の鉛直下方に到達したときまでの重心の落下距離 d は

$$d = \frac{1}{2} a_G t_0^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)^2$$

となり, $\omega = \sqrt{\frac{31g}{17a}}$ を代入すると

$$d = \frac{34}{31} \pi^2 a$$

となります。地面を基準とした鉄棒の高さ h は

$$h = d + 3a = \left(\frac{34}{31} \pi^2 + 3 \right) a$$

となります。

強者の戦略

参考

最後に、「重心が等速直線運動（もしくは等加速度運動）をして、その重心の周りをそれぞれが等速円運動する」ことの説明です。(2)のような水平面上で重力の影響を考える必要がない場合は、(3)のような鉛直面内で重力の影響を考える必要がある場合を考えて、重力が働かない ($g = 0$) とすれば良いので、(3)のような鉛直面内で重力の影響を考える必要がある場合を考えましょう。ただし、一般的に考察するために、小球 1 の質量は M としておきます。

ここまでの考察から分かるように、平面上での重心運動と重心から見た相対運動の分析にはなかなかの記述量が必要です。そこで可能な限りベクトルを用いて分析をしてみましょう。

まずは、慣性系から見た 2 つの小球の重心の運動からです。慣性系から見た小球 1, 小球 2 の加速度をそれぞれ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ とします。小球 1, 小球 2 が受ける重力については、重力加速度のベクトル $\vec{g} = (0, -g)$ を用いると、それぞれ $M\vec{g}$, $m\vec{g}$ となります。また、小球 1 が棒から受ける張力を $\vec{T}$ とすると、小球 2 が棒から受ける張力は $-\vec{T}$ となります。すると、慣性系から見た運動方程式は

$$\text{小球 1 : } M\vec{a}_1 = M\vec{g} + \vec{T}$$

$$\text{小球 2 : } m\vec{a}_2 = m\vec{g} - \vec{T}$$

となります。よって、慣性系から見た重心の加速度 $\vec{a}_G$ は

$$\vec{a}_G = \frac{M\vec{a}_1 + m\vec{a}_2}{M + m} = \vec{g}$$

となり、慣性系から見ると重心は重力加速度 $\vec{g}$ で等加速度運動をすることがわかります。

次に、重心系から見た 2 つの小球の相対運動です。慣性系から見て重心が重力加速度 $\vec{g}$ で運動することから、重心系から見ると小球 1, 小球 2 にはそれぞれ $-M\vec{a}_G = -M\vec{g}$, $-m\vec{a}_G = -m\vec{g}$ の慣性力が働くように見えることになります。重心系から見た小球 1, 小球 2 の加速度をそれぞれ $\vec{a}_{R1}$, $\vec{a}_{R2}$ とすると、重心系から見た運動方程式は

$$\text{小球 1 : } M\vec{a}_{R1} = M\vec{g} + \vec{T} + (-M\vec{g})$$

$$\text{小球 2 : } m\vec{a}_{R2} = m\vec{g} - \vec{T} + (-m\vec{g})$$

すなわち

$$\text{小球 1 : } M\vec{a}_{R1} = \vec{T} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{小球 2 : } m\vec{a}_{R2} = -\vec{T} \dots \textcircled{2}$$

となり、小球 1, 小球 2 には張力のみが働くと考えることができます。このように重力加速度 $\vec{g}$ で運動する観測者から見ると重力が慣性力によって打ち消され（無重力状態！）、重力が働かない水平面上での運動と考えることができるようになります。例えば、京都大学では、2002 年の前期試験の第 1 問において、この考え方をういた誘導のある問題が出題されています。

ここまで考えれば、あとほんの少しで、重心系から見ると重心の周りを 2 つの小球がそれぞれ等速円運動することが分かります。重心系から見た 2 つの小球の運動を、大げ

強者の戦略

さに言うと、極座標（動径方向、接線方向）で考えるのです。動径方向については、重心は小球 1, 小球 2 を $m:M$ に内分する位置にあり、重心から小球 1, 小球 2 までの距離は

それぞれ $\frac{m}{m+M}a$, $\frac{M}{m+M}a$ で一定の値になるので、「重心系から見ると重心の周りを小

球 1, 小球 2 それぞれが円運動をする」ことが分かります。接線方向については、①, ②より重心系から見ると小球 1, 小球 2 には棒に沿った方向すなわち動径方向の張力のみ働き接線方向の力が働かないので、「重心系から見ると小球 1, 小球 2 の角速度（速度）が一定の値となる」ことが分かります。以上より、「重心系から見ると重心の周りを小球 1, 小球 2 それぞれが等速円運動をする」ことが分かります。

いかがだったでしょうか。ベクトルを上手く使うと、記述量が少なく済むだけでなく、見通しも良くなることが分かりますね。

以上で解説は終了ですが、京都大学では重心を用いた 2 体運動の分析が頻出ですので、解説に入る前に紹介した東京大学や京都府立医科大学の問題も是非解いてみてください。これらの 2 次元（平面上）の問題以上に頻出の 1 次元（直線上）の問題は、京大受験生なら言うまでもなく、確実に解けるようにしておきたいところです。「京大スパルタン」でも 1 次元（直線上）の重心を用いた 2 体運動の分析についてのオリジナル問題を取り上げます。お楽しみに！

ここまで長い長い解説を読んでいた皆さん、お疲れ様でした。次回は 2025 年の京大第 2 問の解説でお会いしましょう。