

強者の戦略

2025 年度 京大物理 第 2 問〔問題編〕

今回は 2025 年度の京大の第 2 問を解説します。コンデンサーの極板や誘電体に働く力をエネルギー関係から求める問題と考え方が似ています。近似計算が必要な京大らしい問題です。

物理問題 II

次の文章を読んで、に適した式または数値を、{ }からは適切なものを一つ選びその番号を、それぞれの解答欄に記入せよ。なお、はすでにで与えられたものと同じものを表す。また、問 1～問 3 では、指示にしたがって、解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。ただし、円周率を π とし、以下に登場する物質や気体の透磁率はすべて μ とする。

- (1) 図 1 のように、長さ d 、半径 r の円筒に抵抗の無視できる導線を一樣に N 回巻き付けて作ったソレノイド(以下コイルと呼ぶ)がある。円筒内部は気体で満たされており、コイルの長さ d は r と比べて十分長く、このコイルに電流を流すと円筒内部には一様な磁束密度ができる。このコイルに外部電源を接続して電流 I を流したときに円筒内部に発生する磁束密度の大きさはイである。

次に、微小時間 Δt の間に電流を I から $I + \Delta I$ にゆっくりと変化させると、コイルには誘導起電力ロ $\times \frac{\Delta I}{\Delta t}$ が発生する(ΔI は微小量であり、起電力の符号は電流の上流側の電位が高い場合を正とする)。このことから、このコイルの自己インダクタンスはハである。また、時間 Δt の間に外部電源がコイルにした仕事はニ $\times \Delta I$ である。

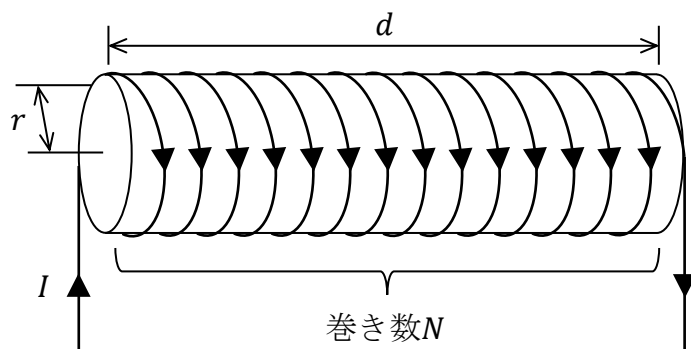


図 1

強者の戦略

図1のコイルに電流 I が流れているとき、コイルにはエネルギー ホ が蓄えられている。コイルを流れる電流が I から $I + \Delta I$ に変化する際のエネルギーの増加は、 $\Delta x \ll x$ を満たす十分小さな Δx に対して成立する近似式

$$(x + \Delta x)^2 - x^2 \doteq 2x\Delta x \quad (i)$$

を使うと ニ $\times \Delta I$ となり、外部電源がコイルにした仕事と一致する。つまり、外部電源が行った仕事がコイルのエネルギーとして蓄積される。

- (2) 図2のように、バルーンアート用の風船のような細長い円筒形状をした伸縮自在の閉じた膜に、伸縮自在で抵抗の無視できる導線を巻き数密度(円筒軸方向の単位長さ当たりの導線の本数)が一樣となるように N 回巻き付けて作ったソレノイド(以下コイルとよぶ)がある。膜内部の気体の量は調整でき、このとき膜は円筒形状を保ったまま半径や長さが変わる。導線は膜に接着されており、膜の半径や長さが増えるとき導線は膜に接したままむらなく伸び縮みし、巻き数密度は一樣に保たれるものとする。また、膜は厚みの無視できる絶縁体でできており、膜と導線は容易に伸縮するものとし、膜の面積、導線の長さおよび形状の変化に要する仕事は十分小さく無視できるものとする。

なお、以下では必要に応じて近似式(i)を使って $(\Delta t)^2$ を無視し、解答欄には Δt を使わずに解答を記入せよ。

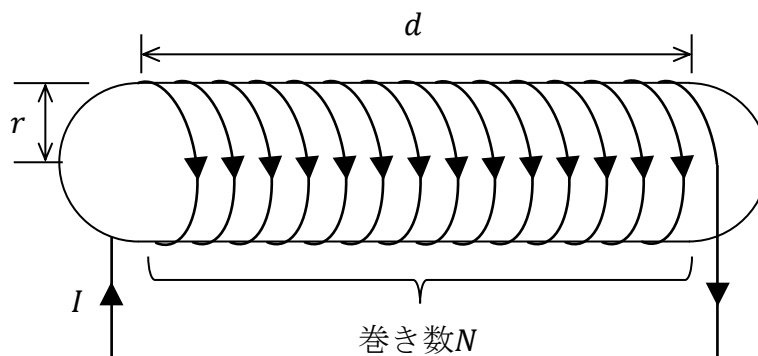


図2

強者の戦略

まず、コイルの両端を固定装置で固定して動かないようにし、膜の長さが d に保たれるようにした。この状態でコイルに電流 I を流し、膜内部の気体の量を調整して、図2のようにコイルの半径が r となる状態を作った。このとき、コイル内部には一様な磁束密度 **イ** が発生した。この状態から、電流 I を一定に保ったまま膜内部の気体の量をゆっくり増加させたところ、コイルの半径は速さ v で大きくなり、微小時間 Δt ののちに $r + v\Delta t$ になった。このとき、コイル一巻きを貫く磁束は Δt の間に $\Delta\Phi = \text{ヘ} \times \Delta t$ だけ増加するので、コイルには誘導起電力 **ト** が発生する(起電力の符号は電流の上流側の電位が高いときを正とする)。また、時間 Δt の間に外部電源がコイルに対して行う仕事は **チ** $\times \Delta t$ である。

一方、コイルに蓄えられるエネルギー(**ホ**)は、コイル半径が大きくなったことにより時間 Δt の間に **リ** $\times \Delta t$ だけ増加する。このエネルギーの変化は、外部電源が行った仕事 **チ** $\times \Delta t$ と、膜内外の気体の圧力差が膜に対して行った仕事の和に等しい。時間 Δt の間にコイルの体積は **ヌ** $\times \Delta t$ だけ増加するので、膜内外の気体の圧力差を

$$\delta p = (\text{外部の気体の圧力}) - (\text{内部の気体の圧力})$$

とすると、膜内外の気体の圧力差が時間 Δt の間に膜に対して行う仕事は δp を使って **ル** $\times \Delta t$ と書ける。以上のことから膜内外の気体の圧力差 δp を求めることができ、 μ と **イ** で求めたコイル内部の磁束密度 B のみを用いて表すと $\delta p = \text{ヲ}$ と書ける。

いま、膜には膜内外の気体がもたらす圧力差に加え、電流 I が作り出す圧力が働いている。これらの圧力が働いている。これらの圧力がつり合いの条件を満たすことから、電流 I が作り出す圧力は、{ **ワ** : ①コイルを膨らませる方向に働いている、②コイルを収縮させる方向に働いている、③働いていない}。

強者の戦略

- (3) コイルを図2の状態に戻してから、コイルの半径を r に固定したうえでコイルの円筒軸方向の長さを自由に変化させられるようにした。コイルの円筒軸方向の長さが d の状態から、電流 I を一定に保ったまま膜の内部の気体量を変化させたところ、円筒軸方向の長さが速さ v でゆっくりと大きくなり、微小時間 Δt ののちに $d + v\Delta t$ になった。このとき、 $\Delta x \ll x$ を満たす十分小さな Δx に対して成り立つ近似式

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \doteq -\frac{\Delta x}{x^2} \quad (\text{ii})$$

を使って Δt の2次以上の項を無視すると、微小時間 Δt の間に外部電源がコイルに対して行う仕事は 力 $\times \Delta t$ であることが分かる。このとき問1～問3に答えよ。

問1 膜内外の気体の圧力差を

$$\delta p = (\text{外部の気体の圧力}) - (\text{内部の気体の圧力})$$

とすると、 δp を求めよ。ただし、近似式(ii)を使って Δt の2次以上の項を無視し、解答には μ と イ で求めたコイル内部の磁束密度 B のみを用いよ。

問2 電流 I がコイルの両端面に作り出す圧力の向きについて、適切なものを以下から選んで番号を解答欄に記入せよ。

- ① コイルが円筒軸方向に伸びようとする圧力が働いている。
- ② コイルが円筒軸方向に縮もうとする圧力が働いている。
- ③ 圧力は働いていない。

問3 問2の結果を、コイルを形成する各一巻きの導線を通る電流が相互に及ぼす力に基づいて簡潔に説明せよ。

強者の戦略

2025 年度 京大物理 第 2 問 [解答解説編]

【解答】

(1)

$$\boxed{\text{イ}} : \frac{\mu NI}{d}$$

$$\boxed{\text{ロ}} : \frac{\pi \mu N^2 r^2}{d}$$

$$\boxed{\text{ハ}} : \frac{\pi \mu N^2 r^2}{d}$$

$$\boxed{\text{ニ}} : \frac{\pi \mu N^2 r^2 I}{d}$$

$$\boxed{\text{ホ}} : \frac{\pi \mu N^2 r^2 I^2}{2d}$$

(2)

$$\boxed{\text{ヘ}} : \frac{2\pi \mu N r v I}{d}$$

$$\boxed{\text{ト}} : \frac{2\pi \mu N^2 r v I}{d}$$

$$\boxed{\text{チ}} : \frac{2\pi \mu N^2 r v I^2}{d}$$

$$\boxed{\text{リ}} : \frac{\pi \mu N^2 r v I^2}{d}$$

$$\boxed{\text{ヌ}} : 2\pi d r v$$

$$\boxed{\text{ル}} : -2\pi d r v \delta p$$

$$\boxed{\text{ヲ}} : \frac{B^2}{2\mu}$$

$$\{ \text{ワ} \} : \text{①}$$

(3)

$$\boxed{\text{カ}} : -\frac{\pi \mu N^2 r^2 v I^2}{d^2}$$

問 1 $-\frac{B^2}{2\mu}$

問 2 ②

問 3 コイルを形成する各一巻きの導線を通る電流が相互に及ぼす力は引力となるので、コイルが円筒軸方向に縮もうとする圧力が働いている。

【解説】

今までにありそうであまりなかった問題で、初見問題と言って良い問題だと思います。ただし、誘導が丁寧なので、正確に近似計算ができれば、完答も十分に可能な問題です。強いて言うなら問 3 の考え方に気付けるかどうかです（決して難しいことを答える訳ではないのですが）。また、今までにありそうであまりなかった問題と言いましたが、実は 1996 年の京大後期の問題で類題が出題されています。あまり知られていない古い後期の問題ですので、このような問題は初めてだった人がほとんどだと思います。ちなみに、研伸館の授業では、直前講習の「高 3 京大阪大・医学部物理最終チェック」でこの問題を取り上げています。では、そろそろ解説を始めます。

強者の戦略

(1) ここは落とせません。

まず、円筒内部に発生する磁場の大きさ H 、磁束密度の大きさ B は

$$H = \frac{NI}{d} \quad (\text{右向き})$$

$$B = \mu H = \frac{\mu NI}{d} \quad (\text{右向き})$$

となり、右向きを正としたコイルの磁束 Φ (1回巻きあたり)は

$$\Phi = B(\pi r^2) = \frac{\pi \mu N r^2 I}{d}$$

となります。次に、微小時間 Δt の間に電流を I から $I + \Delta I$ にゆつくりと変化させるときを考えます。微小時間 Δt の間の右向きを正としたコイルの磁束 Φ (1回巻きあたり)の変化 $\Delta \Phi$ は

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \frac{\pi \mu N r^2 (I + \Delta I)}{d} - \frac{\pi \mu N r^2 I}{d} \\ &= \frac{\pi \mu N r^2}{d} \{(I + \Delta I) - I\} \\ &= \frac{\pi \mu N r^2}{d} \Delta I \end{aligned}$$

となり、電流の上流側の電位が高い場合を正としたコイルに発生する誘導起電力 V (全体)は、 V の正の向きが Φ に対する右ねじの向きの反対になっていることに注意して

$$V = N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\pi \mu N^2 r^2}{d} \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

となります。このことから、このコイルの自己インダクタンス L は

$$L = \frac{\pi \mu N^2 r^2}{d}$$

であることがわかります。

また、時間 Δt の間に外部電源がコイルにした仕事 W_V は、この間に通過する電気量が $I \Delta t$ であることから

$$W_V = V(I \Delta t) = \frac{\pi \mu N^2 r^2 I}{d} \Delta I$$

となります。図1のコイルに電流 I が流れているとき、コイルに蓄えられているエネルギー U_L は

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\pi \mu N^2 r^2 I^2}{2d}$$

となり、コイルを流れる電流が I から $I + \Delta I$ に変化する際のエネルギーの増加 ΔU_L は、近似式(i)を用いて

強者の戦略

$$\begin{aligned}
 \Delta U_L &= \frac{\pi\mu N^2 r^2}{2d} (I + \Delta I)^2 - \frac{\pi\mu N^2 r^2}{2d} I^2 \\
 &= \frac{\pi\mu N^2 r^2}{2d} \{(I + \Delta I)^2 - I^2\} \\
 &\doteq \frac{\pi\mu N^2 r^2}{2d} (2I\Delta I) \\
 &= \frac{\pi\mu N^2 r^2 I}{d} \Delta I
 \end{aligned}$$

となり、外部電源がコイルにした仕事 W_V と一致する。つまり、外部電源が行った仕事
がコイルのエネルギーとして蓄積されることになります。

- (2) ここからバルーンアート用の風船のような細長い円筒状をした伸縮自在の閉じた膜
が登場して初見の状況となりますが、誘導に従って近似計算を進めていけば自然に解け
ます。

最初の状態から電流 I と膜の長さ d を一定に保ったまま膜内部の気体の量をゆっくり増
加させたときを考えます。コイルの半径が速さ v で大きくなることから、微小時間 Δt の間
の右向きを正としたコイルの磁束(1回巻きあたり)の変化 $\Delta\Phi$ は、近似式(i)を用いて

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi &= \frac{\pi\mu N(r + v\Delta t)^2 I}{d} - \frac{\pi\mu N r^2 I}{d} \\
 &= \frac{\pi\mu N I}{d} \{(r + v\Delta t)^2 - r^2\} \\
 &\doteq \frac{\pi\mu N I}{d} \{2r(v\Delta t)\} \\
 &= \frac{2\pi\mu N r v I}{d} \Delta t
 \end{aligned}$$

となります。電流の上流側の電位が高い場合を正としたコイルに発生する誘導起電力 V
(全体)は、 V の正の向きが Φ に対する右ねじの向きの反対になっていることに注意して

$$V = N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{2\pi\mu N^2 r v I}{d}$$

となります。

また、時間 Δt の間に外部電源がコイルにした仕事 W_V は、この間に通過する電気量が
 $I\Delta t$ であることから

$$W_V = V(I\Delta t) = \frac{2\pi\mu N^2 r v I^2}{d} \Delta t$$

となります。コイル半径が大きくなったことによる、時間 Δt の間のコイルに蓄えられる
エネルギーの変化 ΔU_L は、近似式(i)を用いて

強者の戦略

$$\begin{aligned}
 \Delta U_L &= \frac{\pi\mu N^2 I^2}{2d} (r + v\Delta t)^2 - \frac{\pi\mu N^2 I^2}{2d} r^2 \\
 &= \frac{\pi\mu N^2 I^2}{2d} \{(r + v\Delta t)^2 - r^2\} \\
 &\doteq \frac{\pi\mu N^2 I^2}{2d} \{2r(v\Delta t)\} \\
 &= \frac{\pi\mu N^2 r v I^2}{d} \Delta t
 \end{aligned}$$

となります。ただし、(1)とは異なり、このエネルギーの変化 ΔU_L は外部電源がコイルにした仕事 W_V と一致しません。そこで、問題文にある通り、このエネルギーの変化 ΔU_L は、外部電源が行った仕事 W_V と、膜内外の気体の圧力差が膜に対して行った仕事の和に等しいとして、膜内外の気体の圧力差 δp を求めることになります。まずは、時間 Δt の間のコイルの体積の増加 ΔV を求めると、近似式(i)を用いて

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= \{\pi(r + v\Delta t)^2\}d - (\pi r^2)d \\
 &= \pi\{(r + v\Delta t)^2 - r^2\}d \\
 &\doteq \pi\{2r(v\Delta t)\}d \\
 &= 2\pi d r v \Delta t
 \end{aligned}$$

なので、膜内外の気体の圧力差を

$$\delta p = (\text{外部の気体の圧力}) - (\text{内部の気体の圧力})$$

とすると、 δp の正の方向が r が減少する方向であることに注意して、膜内外の気体の圧力差が時間 Δt の間に膜に対して行う仕事 W_P は、 δp を用いて

$$W_P = -\delta p \Delta V = -2\pi d r v \delta p \Delta t$$

と書けます。以上のことから、エネルギー関係 $\Delta U_L = W_V + W_P$ に ΔU_L 、 W_V 、 W_P を代入して

$$\frac{\pi\mu N^2 r v I^2}{d} \Delta t = \frac{2\pi\mu N^2 r v I^2}{d} \Delta t + (-2\pi d r v \delta p \Delta t) \quad \therefore \delta p = \frac{\mu N^2 I^2}{2d^2}$$

となり、(1)の $B = \frac{\mu N I}{d}$ を用いて

$$\delta p = \frac{B^2}{2\mu}$$

と書けます。よって、 $\delta p > 0$ となり、膜内外の気体がもたらす圧力差は r が減少する方向となります。さらに、膜内外の気体がもたらす圧力差と電流 I が作り出す圧力がつり合いの条件を満たすことから、電流 I が作り出す圧力は r が増加する方向すなわちコイルを膨らませる方向に働いています (→①)。

強者の戦略

(3) ほぼ(2)と同じ流れで求めることができます。

最初の状態から電流 I とコイルの半径 r を一定に保ったまま膜内部の気体の量をゆっくり増加させたときを考えます。膜の長さが速さ v で大きくなることから、微小時間 Δt の間の右向きを正としたコイルの磁束(1回巻きあたり)の変化 $\Delta\Phi$ は、近似式(ii)を用いて

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \frac{\pi\mu Nr^2 I}{d+v\Delta t} - \frac{\pi\mu Nr^2 I}{d} \\ &= \pi\mu Nr^2 I \left(\frac{1}{d+v\Delta t} - \frac{1}{d} \right) \\ &\doteq \pi\mu Nr^2 I \left(-\frac{v\Delta t}{d^2} \right) \\ &= -\frac{\pi\mu Nr^2 v I}{d^2} \Delta t\end{aligned}$$

となります。電流の上流側の電位が高い場合を正としたコイルに発生する誘導起電力 V (全体)は、 V の正の向きが Φ に対する右ねじの向きの反対になっていることに注意して

$$V = N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\pi\mu N^2 r^2 v I}{d^2}$$

となります。

また、時間 Δt の間に外部電源がコイルにした仕事 W_V は、この間に通過する電気量が $I\Delta t$ であることから

$$W_V = V(I\Delta t) = -\frac{\pi\mu N^2 r^2 v I^2}{d^2} \Delta t$$

となります。

問1 膜の長さが大きくなったことによる、時間 Δt の間のコイルに蓄えられるエネルギーの変化 ΔU_L は、近似式(ii)を用いて

$$\begin{aligned}\Delta U_L &= \frac{\pi\mu N^2 r^2 I^2}{2(d+v\Delta t)} - \frac{\pi\mu N^2 r^2 I^2}{2d} \\ &= \frac{\pi\mu N^2 r^2 I^2}{2} \left(\frac{1}{d+v\Delta t} - \frac{1}{d} \right) \\ &\doteq \frac{\pi\mu N^2 r^2 I^2}{2} \left(-\frac{v\Delta t}{d^2} \right) \\ &= -\frac{\pi\mu N^2 r^2 v I^2}{2d^2} \Delta t\end{aligned}$$

となります。ただし、(2)と同様に、(1)とは異なり、このエネルギーの変化 ΔU_L は外部電源がコイルにした仕事 W_V と一致しません。(2)の問題文にある通り、このエネルギーの変化 ΔU_L は、外部電源が行った仕事 W_V と、膜内外の気体の圧力差が膜に対して行った仕事の和に等しいとして、膜内外の気体の圧力差 δp を求めることとなります。まずは、時間 Δt の間のコイルの体積の増加 ΔV を求めると

強者の戦略

$$\Delta V = (\pi r^2)(d + v\Delta t) - (\pi r^2)d \\ = \pi r^2 v \Delta t$$

となるので(近似計算の必要なし), 膜内外の気体の圧力差を

$$\delta p = (\text{外部の気体の圧力}) - (\text{内部の気体の圧力})$$

とすると, δp の正の方向が r が減少する方向であることに注意して, 膜内外の気体の圧力差が時間 Δt の間に膜に対して行う仕事 W_p は, δp を用いて

$$W_p = -\delta p \Delta V = -\pi r^2 v \delta p \Delta t$$

と書ける。以上のことから, エネルギー関係 $\Delta U_L = W_V + W_p$ に ΔU_L , W_V , W_p を代入して

$$-\frac{\pi \mu N^2 r^2 v I^2}{2d^2} \Delta t = \left(-\frac{\pi \mu N^2 r^2 v I^2}{d^2} \Delta t \right) + (-\pi r^2 v \delta p \Delta t) \quad \therefore \delta p = -\frac{\mu N^2 I^2}{2d^2}$$

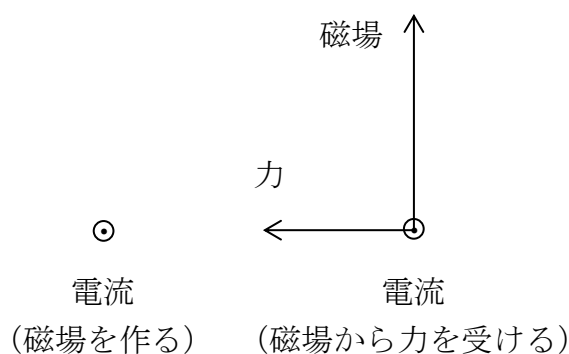
(1)の $B = \frac{\mu N I}{d}$ を用いて

$$\delta p = -\frac{B^2}{2\mu}$$

と書けます。

問2 問1より $\delta p < 0$ となるので, δp の正の方向が d が減少する方向であることに注意して, 膜内外の気体がもたらす圧力差は d が増加する方向となります。さらに, 膜内外の気体がもたらす圧力差と電流 I が作り出す圧力が釣り合いの条件を満たすことから, 電流 I が作り出す圧力は d が減少する方向となり, コイルが円筒軸方向に縮もうとする圧力が働いています (→②)。

問3



コイルを形成する各一巻きの導線を通る電流の向きは同じなので, 同じ向きに流れる平行な直線電流を考えるとわかりやすいです。上図のように, 左側の電流が磁場を作り, 右側の電流が磁場から力を受けると考えます。電流に対する右ねじの向きに磁場が生じ, フレミング左手の法則から電流が磁場から受ける力の向きが決まり, 同じ向きに流れる電流間には引力が働くことがわかります。よって, コイルを形成する各一巻きの導線を通る電流が相互に及ぼす力は引力となり, コイルが円筒軸方向に縮もうとする圧力が働いていることがわかります。

強者の戦略

実際の解答冊子を確認すると、問1、問2については答えのみ記入できるスペース、問3については文章1つもしくは2つ程度が記入できるスペースしかありませんので、解答はそれに合わせて記入しました。

様々なところで公表されているこの問題の難易度評価を見ると、「やや難」となっていることが多いようです。ただし、注意が必要なのは、他の大学も含めた入試問題全体の中で「やや難」という評価だということです。他の大学も含めた入試問題全体の中でと言うことなら私もその通りだと思いますが、京大の入試問題全体の中で言うと「標準」レベルの問題だと思います。さらに言うと、京大物理で合格点を取るためには、この問題を「やや易」の問題と感じられるようになる必要があります。今までにありそうであまりなかった（解説の冒頭で述べたように京大後期で類題が出題されていますが、あまり知られていない）問題ですので、初見問題と言って良い問題だと思います。しかし、誘導は丁寧ですし、(2)と(3)は近似計算が違うだけで考え方は同じです。このレベルの問題をミスなく解けるようにすることは、京大物理で合格点を取るために絶対に必要なことです。しっかり対策をすれば必ずできるようになります。「京大スパルタン」の物理では近似計算が必要な問題をいくつか取り上げています。京大対策に是非活用してください！

ここまで読んでいただいた皆さん、お疲れ様でした。次回は、2025年の京大第3問の解説でお会いいたしましょう。