Kenshinkan Math.　集中講義

曲線の長さから見えるもの ①　～高校数学で議論する微分幾何～

吉田　信夫

理系への数学　09 年 6 月号　掲載

＝　概　要　＝

解析的な手法で図形を考察する問題は大学入試でも多く見かける（ここで扱う問題の一部も大学入試問題からの引用である）.

本稿では，曲線の長さ：

$$L(T)=\int_1^T\sqrt{\{X'(t)\}^2+\{Y'(t)\}^2}\,dt\,,$$
$$l(t)=\int_1^T\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

を中心的に議論し，それを通じて，現在の高校数学範囲外である「複素数平面」,「微分方程式」,「空間での方程式」などの考え方を紹介する.

第１部：

「球面上の測地線（最短経路）が大円に沿ったものである」という今回の大きな主題は，球面図形を扱う幾何学において，【ユークリッドの平行線公理】：

『直線 l 上にない１点 P を通り，l と共有点をもたない直線がただ１つ存在する』

が成り立たないことを導く.（測地線が「ユークリッド幾何学での直線」の代用品となる．これが非ユークリッド幾何学の出発点である.）

第２部：

「双曲幾何学」というもう１つの非ユークリッド幾何学を紹介する．ここで複素数平面について扱う.

第３部：

ユークリッド幾何学に戻り，「周の長さが一定で面積が最大になる図形は円である」や「双曲線関数 $y=\cosh x$ のグラフがカテナリー（懸垂線）である」という事実を高校数学の知識のみを仮定して議論する.

第１部　～球面上の最短経路（測地線）～

ここでは，球面上の最短経路について考える．少しずつ一般化していき，大円が測地線であることを確認する．さらに，世界地図と地球儀の関係を探る.

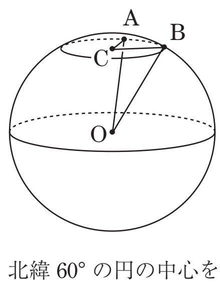
まずは，京都大で出題された入試問題から.

1　球面上の測地線について ①（京都大の問題）

地球上の北緯 60° 東経 135° の地点を A，北緯 60° 東経 75° の地点を B とする． A から B に向かう２種類の飛行経路 R_1，R_2 を考える． R_1 は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする．R_2 は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする． R_1 に比べて R_2 は飛行距離が３％以上短くなることを示せ．ただし，地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度 0 を飛ぶものとする．また必要があれば付属の三角関数表を用いよ（表は省略).

注：大円とは，球を球の中心を通る平面で切ったとき，その切り口にできる円のことである.

解答



A，B の東経を 60°，0° としても同じ結果になるので，こちらで考える.

経路 R_1，R_2 の飛行距離をそれぞれ l_1，l_2 とする.

また，地球の中心を O とし，北緯 60° の円の中心を C とする.

地球の半径を R とおくと，北緯 60° の円の半径は $\frac{1}{2}R$ である．$\angle\mathrm{ACB}=60°$ であるから，

$$l_1=2\pi\cdot\frac{1}{2}R\cdot\frac{60}{360}=\frac{1}{6}\pi R$$

である.

また，O(0，0，0)，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2}R,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)$ と座標設定すると，$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{4}R,\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}R,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)$ であるから，

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{7}{8}\ (=0.875)$$

$$\therefore\quad 28.5^\circ<\angle\mathrm{AOB}<29.0^\circ$$
$$(\cos 28.5^\circ=0.8788,\ \cos 29.0^\circ=0.8746)$$

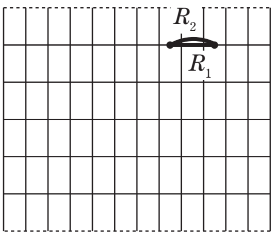
である．よって，

$$l_2=2\pi\cdot R\cdot\frac{\angle\mathrm{AOB}}{360}<\frac{29}{180}\pi R$$
$$\therefore\quad \frac{l_2}{l_1}<\frac{29}{30}=\frac{290}{300}<\frac{291}{300}=\frac{97}{100}$$

であるから，題意は示された．

（解答おわり）

☆　メルカトル図法による世界地図で見ると，R_1 は真横に進む経路である．経路 R_2 は少し北に上がったように見え，R_1 より長く感じる．しかし，実際は R_2 の方が 3％も短くなっている．（地球の半径は $R\fallingdotseq 6300$ km なので，この 3％の差は非常に大きい！）



次で大円が最短円弧であることを示そう．

2　球面上の測地線について ②（球面上の最短円弧）

空間内で，点 O を中心とする球面 S 上に異なる 2 点 A，B がある．直線 AB を含む平面 P と球面 S の交わりの円を C とする．平面 P を変化させるとき，C 上の劣弧 AB（長くない方の弧）の長さが最小になるのは平面 P が中心 O を通るときであることを示せ．

解答

A，B が S の直径の両端になるとき，どんな平面 P でも O を通り，C は大円となるから，弧長は等しい．

以下，A，B が S の直径の両端でない場合を考える．

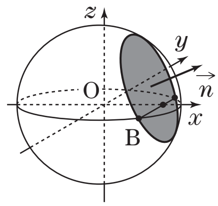
座標空間内で考え，O(0，0，0) とし，S の半径は 1 として一般性を失わない．さらに，

$$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0),\ \mathrm{B}(\cos\theta,\ -\sin\theta,\ 0)$$
$$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおいても一般性を失わない．

このとき，zx 平面，xy 平面に関する対称性から，平面 P の法線ベクトル $\vec{n}$ は

$$\vec{n}=(\cos\varphi,\ 0,\ \sin\varphi)\quad\left(0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$



とおいて良い．（劣弧は $x\geqq\cos\theta$，$y\leqq 0$ の部分になる）

φ を変数としたとき，$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ でのみ弧長が最小になることを示せば良い．

C の中心を Q，半径を r とし，中心角 $\angle\mathrm{AQB}=\alpha$ とおく（いずれも φ に依存）と，考えるべき弧長 $L(\varphi)$ は，

$$L(\varphi)=r\alpha$$

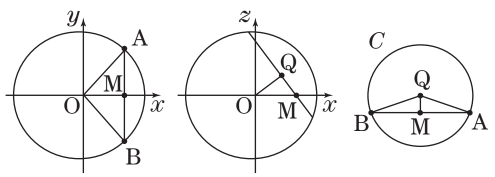
と表される．

ここで，P は AB の中点 M$(\cos\theta,\ 0,\ 0)$ を通る．

（$\vec{n}\perp\mathrm{MP}$ から，平面 P の方程式は

$$P:(\cos\varphi)x+(\sin\varphi)z-\cos\varphi\cos\theta=0$$

である．）



ここで，上図より，

$$\mathrm{OQ}=\mathrm{OM}\cos\varphi=\cos\theta\cos\varphi,$$
$$r=\sqrt{1-\cos^2\theta\cos^2\varphi},$$
$$\mathrm{QM}=\mathrm{OM}\sin\varphi=\cos\theta\sin\varphi,$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\theta}{r}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(*)$$

である．これらを用いて $L(\varphi)$ を考えるが，φ や r よりも，α を用いて表すと $L(\varphi)$ はシンプルになる：

$$L(\varphi)=\sin\theta\frac{\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

$\alpha=\pi$（つまり $\varphi=0$）のときは次の計算が当てはまらない．しかし，$L(\varphi)$ が連続なので，無視して考える．

$\varphi \fallingdotseq 0$ のとき，$L(\varphi)$ を φ で微分すると，

$$\frac{d}{d\varphi}L(\varphi)=\sin\theta\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{d\alpha}{d\varphi}$$

$$=\sin\theta\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\tan\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{d\alpha}{d\varphi}$$

となる．いま，

$$\frac{d\alpha}{d\varphi}=\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\alpha}{dr}$$

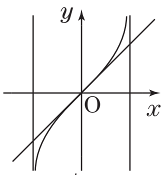
$$=\frac{2\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}{2\sqrt{1-\cos^2\varphi\cos^2\theta}}\cdot\frac{-\frac{\sin\theta}{r^2}}{\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\left(\because\ (*)\text{ より } \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{d\alpha}{dr}=-\frac{\sin\theta}{r^2}\right)$$

$$<0$$

である．

さらに，$y=x$ が $y=\tan x$ の $(0,\ 0)$ における接線であること，$y=\tan x$ の凸性を利用して，



$$\tan\frac{\alpha}{2}>\frac{\alpha}{2}\quad\left(\because\ 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}\right)$$

である．よって，

$$\frac{d}{d\varphi}L(\varphi)<0\quad\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$$

であるから，$L(\varphi)$ は狭義単調減少関数である．

以上で，$\varphi=\frac{\pi}{2}$ でのみ弧長 $L(\varphi)$ が最小になることが示された．

（解答おわり）

☆　これで，球面上の最短“円弧”が大円であると分かった．次に，少し強い仮定のもと，大円が最短“経路”であることを示してみよう．

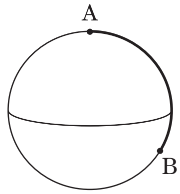
空間内で，球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 上に２点

$$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{B}(\cos\alpha,\ 0,\ \sin\alpha)$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

がある．S 上の曲線で A と B を結ぶとき，その長さが最小になるものは，大円の弧，つまり，

$$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=0\\ z=\sin\theta\end{cases}\quad\left(\alpha\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$



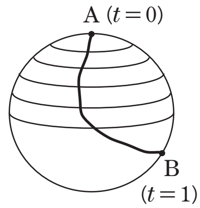
である．

この事実に関して考察する．

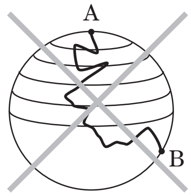
まず，A と B を結ぶ曲線を，緯度 $\theta(t)$，経度 $\varphi(t)$ をパラメータ t $(0\leqq t\leqq 1)$ の関数として，

$$\begin{cases}x=\cos\theta(t)\cos\varphi(t)\\ y=\cos\theta(t)\sin\varphi(t)\\ z=\sin\theta(t)\end{cases}$$

$$\left(\theta(0)=\frac{\pi}{2},\ \theta(1)=\alpha,\ \varphi(1)=0\right)$$



と表す．



長さが最小になるものを考えるので，緯度 $\theta(t)$ が t の減少関数である場合のみを考えることとし，緯度 $\theta(t)$ をパラメータとして，経度 $\varphi(t)$ を $\theta(t)$ の関数 $\varphi(\theta)$ と見なす（逆関数を利用）．つまり，A と B を結ぶ曲線を，パラメータ θ を用いて

$$\begin{cases}x=\cos\theta\cos\varphi(\theta)\\ y=\cos\theta\sin\varphi(\theta)\\ z=\sin\theta\end{cases}\quad\left(\alpha\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ \varphi(\alpha)=0\right)$$

と表す．ただし，$\varphi(\theta)$ は θ で微分可能であり，$\varphi'(\theta)$ が連続であるとする．

速度ベクトル $\vec{v}$ と速さ $\left|\vec{v}\right|$ を考えて，長さ L は

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\cos\varphi(\theta)-\cos\theta\sin\varphi(\theta)\cdot\frac{d\varphi}{d\theta}\\ -\sin\theta\sin\varphi(\theta)+\cos\theta\cos\varphi(\theta)\cdot\frac{d\varphi}{d\theta}\\ \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$\left|\vec{v}\right|=\left(1+\cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\geqq 1$$

$$\therefore\quad L=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\left|\vec{v}\right|d\theta\geqq\frac{\pi}{2}-\alpha$$

を満たす．

$\varphi(\theta)$ が恒等的に 0 のときには等号が成り立ち，そうでないときには，$\left|\vec{v}\right|$ が連続なので，等号不成立である．

これで，大円が“最短経路”であることが実感できただろう．

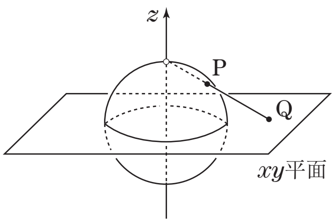
球面上の最短経路（測地線）は大円である．これは平面での直線と同じ役割のものである．すると，

『大円 C 上にない１点 P を通り C と共有点をもたない大円がただ１つ存在する』

は“偽”であり，球面版【ユークリッドの平行線公理】は成り立たない．つまり，平面と球面は本質的に異なる構造をしており，それゆえに，球面（地球）の地図を平面上に作ると距離的な歪みが生じてしまう．

次で，メルカトル図法とは少し違う地図の構成を行い，大円の像を見ていこう．

$\boxed{3}$ 球面上の測地線について③（平面への射影）



球面 $x^2+y^2+z^2=1$ から点 A(0, 0, 1) を除いたものを S とおく．S 上の点 P$(p,\ q,\ r)$ に対し，直線 AP と xy 平面の交点を Q$(X,\ Y,\ 0)$ とおく．これによって，S から xy 平面への全単射 f を定義する (Q$=f$(P))．

(1)　X, Y を p, q, r で表せ．また，逆に p, q, r を X, Y で表せ．

(2)　f による S 上の大円 C の像 $f(C)$ は，xy 平面上の「原点を通る直線」または「円」であることを示せ．

(3)　(2) の「円」になる場合，その円 D の中心を K とおき，直線 OK と D の交点を L，M とおく（ただし，K＝O のときは，O を通る任意の直線とする）．

O は線分 LM の内部にあり，OL・OM＝1 が成り立つことを示せ．

解答

(1)　題意より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}p\\q\\r-1\end{pmatrix}\ (k\in\mathbb{R})$$

から，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{p}{1-r},\ \frac{q}{1-r},\ 0\right)\ \left(k=\frac{1}{1-r}\right)$$

$$\therefore\quad X=\frac{p}{1-r},\ Y=\frac{q}{1-r}$$

である．逆に，$p^2+q^2+r^2=1$ であるから，

$$(1-r)^2(X^2+Y^2)=1-r^2$$

$$\iff\quad r=\frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1}\ (\because\ r\neq 1)$$

より，$(p,\ q,\ r)$ は次のようになる：

$$\frac{1}{X^2+Y^2+1}(2X,\ 2Y,\ X^2+Y^2-1)$$

(2)　C 上の点 P の像 Q の軌跡が $f(C)$ である．

大円 C を定める平面（原点を通る）の方程式を

$$ax+by+cz=0$$

とおく．ただし，$(a,\ b,\ c)\neq\vec{0}$ である．

$ap+bq+cr=0$ に (1) の結果を代入すると，

$$\frac{2aX+2bY+c(X^2+Y^2-1)}{X^2+Y^2+1}=0$$

$$\iff\quad cX^2+cY^2+2aX+2bY-c=0$$

となる．

○　$c=0$ なら，$aX+bY=0$ は原点を通る直線を表す．

○　$c\neq 0$ のとき，これは円を表す（空集合や１点にはならないと簡単に分かる）．

(3)　(2) でおいた平面の法線ベクトル $(a,\ b,\ c)$ を拡大縮小，回転，対称移動して，

$$(a,\ 0,\ c)\quad (c>0,\ a^2+c^2=1)$$

の場合のみ考えれば十分である．

$$D:\left(x+\frac{a}{c}\right)^2+y^2=\frac{1}{c^2},\ z=0$$

$a=0$ のときは明らかに成り立つので，$a\neq 0$ のときを考えると，K，L，M の x，y 座標はそれぞれ

$$\left(-\frac{a}{c},\ 0\right),\ \left(-\frac{1+a}{c},\ 0\right),\ \left(\frac{1-a}{c},\ 0\right)$$

である．$c>0$，$a^2+c^2=1$，$-1<a<1$ より，

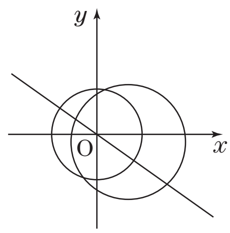
$$-\frac{1+a}{c}<0<\frac{1-a}{c},$$

$$\mathrm{OL}\cdot\mathrm{OM}=\left|-\frac{1+a}{c}\right|\cdot\left|\frac{1-a}{c}\right|=\frac{1-a^2}{c^2}=1$$

が成り立つ．これで示された．

（解答おわり）

☆　この地図では，測地線は図のように見えている．



第２部では，全く異なる測地線をもつ地図を考え，双曲幾何に触れてみよう！

（よしだ　のぶお／研伸館）