Kenshinkan Math.　集中講義

曲線の長さから見えるもの ②　～高校数学で議論する微分幾何～

吉田　信夫

理系への数学　09 年 7 月号　掲載

第２部　～高校数学で理解できる双曲幾何学～

実在の曲面から少し離れて, 勝手に「測地線」と「距離」を定義した，奇妙なモデルを考えてみよう．ユークリッド的な先入観にとらわれないように.

4　双曲幾何学へ（特殊な距離の計量法）

上半平面 $\mathbb{H}=\{(x,\ y)\,|\,y>0\}$ の２点 $\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$, $\mathrm{Q}(q_1,\ q_2)$ に対し,

- $p_1=q_1$ のとき P，Q を通る直線
- $p_1\neq q_1$ のとき P，Q を通り，中心が x 軸上の円

を「２点 P，Q を結ぶ測地線」と呼ぶことにする．（ただし，$\mathbb{H}$ 内の部分のみをいう）.

P，Q を結ぶ測地線に沿った通常の弧長が

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

であるとき, “ポアンカレ計量” という距離の測り方を

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{y}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で定め，これを $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ と表すことにする.

(1)　次のそれぞれの場合で $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ を求めよ.

①　$\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，$\mathrm{Q}(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$ $(r>0,\ 0<\theta<\varphi<\pi)$

②　$\mathrm{P}(1,\ p)$，$\mathrm{Q}(1,\ q)$ $(0<p<q)$

---

(1) の解答

①　測地線は $x^2+y^2=r^2$ $(y>0)$ であり,

$$\begin{aligned}
&d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})\\
&=\int_\theta^\varphi \frac{\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}}{r\sin t}\,dt=\int_\theta^\varphi \frac{1}{\sin t}\,dt\\
&=\frac{1}{2}\int_\theta^\varphi\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}+\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)dt\\
&=\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right)\right]_\theta^\varphi\\
&=\log\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)-\log\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

である（t は偏角).

別の方法 $(t=x)$ でも

$$\begin{aligned}
&d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})\\
&=\int_{r\cos\varphi}^{r\cos\theta}\frac{1}{y}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{r\cos\varphi}^{r\cos\theta}\frac{r}{r^2-x^2}\,dx\\
&=\left[-\frac{1}{2}\log\left(\frac{r-x}{r+x}\right)\right]_{r\cos\varphi}^{r\cos\theta}\\
&=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right)-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)
\end{aligned}$$

となり，$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ が積分の仕方によらないことが分かるだろう.

②　測地線は $x=1$ $(y>0)$ であり,

$$\begin{aligned}
&d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})\\
&=\int_p^q\frac{1}{y}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy\\
&=\Big[\log y\Big]_p^q\\
&=\log q-\log p
\end{aligned}$$

である $(t=y)$.

（(1) の解答おわり）

☆　まだ実感が湧かないかも知れないが，いまは「こんな測地線に沿って，こんな方法で距離らしきものを計算するらしい」というくらいで良い.

引き続き，上半平面 $\mathbb{H}$ について見ていこう.

次に，１次分数変換 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ を以下で定める：

$\mathrm{A}(x,\ y)\in\mathbb{H}$ に対し, 複素数を $z=x+iy$ とおく.

$a,\ b,\ c,\ d$ を $ad-bc>0$ なる実数とし,

$$\begin{aligned}
\frac{az+b}{cz+d}&=w\ (\in\mathbb{C})\\
&=X+iY\ (X,\ Y\in\mathbb{R})
\end{aligned}$$

であるとき，f による A の像を $f(\mathrm{A})=\mathrm{B}(X,\ Y)$ とする.

(2)　任意の $\mathrm{A}\in\mathbb{H}$ で $f(\mathrm{A})$ が定義でき，$f(\mathrm{A})\in\mathbb{H}$ である（つまり，上の定義が意味をなす）ことを示せ.

---

(2) の解答

$ad-bc \fallingdotseq 0$ より c と d が同時に0になることはない．しかも，$z \notin \mathbb{R}$ であるから，$cz+d \fallingdotseq 0$ であり，どんな z に対しても w は存在する．つまり，$f(\mathrm{A})$ は定義できる．さらに，

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{(ax+b+iay)(cx+d-icy)}{(cx+d)^2+(cy)^2}$$
$$=\frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2+i(ad-bc)y}{(cx+d)^2+(cy)^2}$$
$$\therefore \quad Y=\frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+(cy)^2}>0$$

となるので，$f(\mathrm{A}) \in \mathbb{H}$ であることが示された．

（**(2)** の解答おわり）

☆　$(a,\ b)$ と $a+ib$ を対応させて，複素数全体の集合を図示したものが，「複素数平面」である．大学入試で出題されていた時代には，１次分数変換は頻出で，多くは軌跡と絡んでいた．それほど難しくないので，次の (3) で取り上げておく．

---

(3)　任意の測地線は，複素数 $z=x+iy$ を用いると，

$$m|z-\alpha|=n|z-\beta|\ ,\ y>0$$
$(m,\ n,\ \alpha,\ \beta$ は実数，m と n は正，$\alpha \fallingdotseq \beta)$

と表せることを示せ．ただし，複素数の絶対値は

$$|p+iq|=\sqrt{p^2+q^2}\ \ (p,\ q \in \mathbb{R})$$

である．

---

(3) の解答

測地線は x 軸上の２点を結ぶ線分の「垂直２等分線」か「アポロニウスの円」と見なせる．（ただし，$y>0$）

ゆえに，その２点を $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 0)$ $(\alpha \fallingdotseq \beta)$ とおき，測地線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=n:m$$

となる正数 $m,\ n$ が存在し，

$$m\mathrm{AP}=n\mathrm{BP}$$
$$\Longleftrightarrow \quad m\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}=n\sqrt{(x-\beta)^2+y^2}$$
$$\therefore \quad m|z-\alpha|=n|z-\beta|$$

である．以上で示された．

（**(3)** の解答おわり）

☆　考え方は，ベクトル方程式と同様である．(4) の前半でこの複素方程式を利用する．１次分数変換との相性の良さが見えてくるだろう．

ここでの絶対値は，複素数平面上の２点 O，$\mathrm{P}(z)$ の距離を，ユークリッド的に測ったものである．

---

(4)　P，Q $\in \mathbb{H}$ に対し，P，Q を通る測地線の f による像は $f(\mathrm{P})$，$f(\mathrm{Q})$ を通る測地線であることを示せ．また，$d(f(\mathrm{P}),\ f(\mathrm{Q}))=d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ であることを示せ．（このような写像を等長変換という）

---

(4) の解答

(2) と同様に，逆関数が定義され，

$$\frac{az+b}{cz+d}=w \quad \Longleftrightarrow \quad z=\frac{dw-b}{-cw+a}$$

である．(3) に代入して，$w=X+iY$ が満たす条件は，

$$m\left|\frac{dw-b}{-cw+a}-\alpha\right|=n\left|\frac{dw-b}{-cw+a}-\beta\right|$$
$$\Longleftrightarrow \quad m\left|(c\alpha+d)w-(a\alpha+b)\right|$$
$$=n\left|(c\beta+d)w-(a\beta+b)\right|$$

である．

$(c,\ d) \fallingdotseq (0,\ 0)$，$\alpha \fallingdotseq \beta$ より，$c\alpha+d$，$c\beta+d$ が同時に 0 になることはないことに注意する．

○　$c\alpha+d=0$ のときは，$c\beta+d \fallingdotseq 0$ より，

$$\left|w-\frac{a\beta+b}{c\beta+d}\right|=\frac{m}{n}\cdot\left|\frac{a\alpha+b}{c\beta+d}\right|$$

であり，これは中心が x 軸上の円（測地線）を表す．

○　$c\beta+d=0$ のときも同様である．

○　いずれも 0 でないとき，

$$\frac{m}{|c\beta+d|}\left|w-\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}\right|=\frac{n}{|c\alpha+d|}\left|w-\frac{a\beta+b}{c\beta+d}\right|$$

であり，これも測地線を表す．

以上で前半は示されたので，以下で後半を示す．

$f((x,\ y))=(X,\ Y)$ のとき，

$$\frac{1}{Y}\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2}=\frac{1}{y}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

となることを示せば良い (t は適当なパラメータ).

ここで，$z=x+iy$ において，

$$|z|^2=x^2+y^2=z\overline{z},\ x=\frac{z+\overline{z}}{2},\ y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

である．

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}(x+iy)=\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}$$

という記号を用いることにし，複素数値関数でも“商の微分公式”が使えることを認めたら，

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+\left(\frac{dY}{dx}\right)^2=\frac{dw}{dx}\cdot\frac{d\overline{w}}{dx}$$
$$=\frac{a\dfrac{dz}{dx}\cdot(cz+d)-(az+b)\cdot c\dfrac{dz}{dx}}{(cz+d)^2}\times\frac{a\dfrac{d\overline{z}}{dx}\cdot(c\overline{z}+d)-(a\overline{z}+b)\cdot c\dfrac{d\overline{z}}{dx}}{(c\overline{z}+d)^2}$$
$$=\frac{(ad-bc)^2}{|cz+d|^4}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\overline{z}}{dx}$$
$$=\frac{(ad-bc)^2}{|cz+d|^4}\cdot\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\},$$

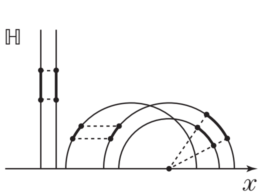
$$Y=\frac{\dfrac{az+b}{cz+d}-\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}}{2i}=\frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{2|cz+d|^2 i}$$
$$=\frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2}$$

である．これで示された．

（**(4)** の解答おわり）

☆　この世界では，１次分数変換がキレイな写像になっている．平面での１次変換みたいなものである．

☆「計量」について，少し掘り下げよう．(1) から，



● d(P，Q) の値は，x 軸方向の平行移動で不変

● 測地線が円の場合，その円の中心を基準に拡大しても測地線上の点の距離は不変

という性質をもつことが分かる．

ゆえに，(4) は測地線が

$$x=0,\ x^2+y^2=1\ (y>0)$$

のいずれかである場合を考えれば十分である．これなら複素関数を使わずに示せる．

前者の場合，(2) に $x=0$ を代入して，

$$X=\frac{acy^2+bd}{c^2y^2+d^2},\ Y=\frac{(ad-bc)y}{c^2y^2+d^2}$$

となる．パラメータを $t=y$ として，

$$\frac{1}{y}\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dy}{dy}\right)^2}=\frac{1}{y},$$

$$\frac{1}{Y}\sqrt{\left(\frac{dX}{dy}\right)^2+\left(\frac{dY}{dy}\right)^2}$$
$$=\frac{c^2y^2+d^2}{(ad-bc)y}\cdot\frac{ad-bc}{(c^2y^2+d^2)^2}\times\sqrt{4c^2d^2y^2+(d^2-c^2y^2)^2}$$

$$\left(\because\ \frac{dX}{dy}=\frac{2acy(c^2y^2+d^2)-(acy^2+bd)2c^2y}{(c^2y^2+d^2)^2}=\frac{2cd(ad-bc)y}{(c^2y^2+d^2)^2},\right.$$
$$\left.\frac{dY}{dy}=\frac{(ad-bc)\{(c^2y^2+d^2)-y\cdot 2c^2y\}}{(c^2y^2+d^2)^2}=\frac{(ad-bc)(d^2-c^2y^2)}{(c^2y^2+d^2)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{y}$$

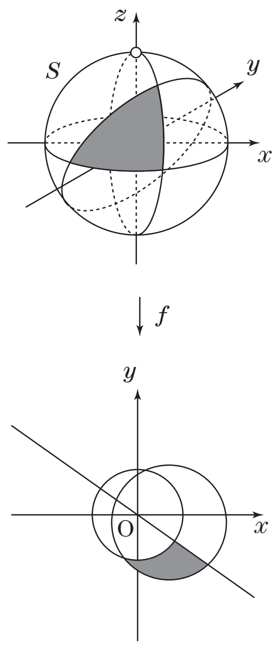
であるから，

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})=d(f(\mathrm{P}),\ f(\mathrm{Q}))$$

が成り立つ．後者も，同様な計算で示すことができる．

（4 はここまで）

“こんなことを考えて何をしたいのか？”



第１部の 3 で行ったことは，「地球上の点を射影して平面上に地図を作製する」という作業であった．もちろん，この地図は，正しい距離を表すものにはなっていない．

また，地球上の最短経路（大円）は，地図上で見ると，「原点を通る直線」か，「3(3)で考えた円」である．

そこで，地図上にある２点から，地球上での距離を計算する必要が生じる．そのためには…

地球上での距離は，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

の平方根に，測地線のパラメータ表示を代入したものを積分して得られる．

$\boxed{3}$(1) を利用して，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\\&=\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{2X}{X^2+Y^2+1}\right)\right\}^2+\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{2Y}{X^2+Y^2+1}\right)\right\}^2\\&\quad+\left\{\frac{d}{dt}\left(1-\frac{2}{X^2+Y^2+1}\right)\right\}^2\\&=\frac{4}{(X^2+Y^2+1)^2}\left\{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2\right\}\end{aligned}$$

であるから，これの平方根を測地線に沿って積分すれば，地図のみから地球上での距離が得られる．

これが地図の距離的歪みを補正するものであるが，地図だけで議論すると次のようになる：

まず，測地線（つまり，最短経路の像）を

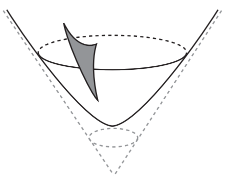
「原点を通る直線」と「$\boxed{3}$(3) で考えた円」

とし，距離をこの線に沿って以下のように測る：

$$\int_\alpha^\beta\frac{2}{X^2+Y^2+1}\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2}\,dt$$

これを利用して測定した距離は，射影前の地球上で測定したものと一致する．

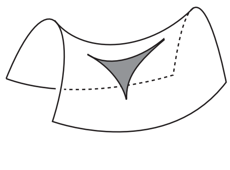
$\boxed{4}$ との類似性が見える．では，$\boxed{4}$ で考えた“地図”は何を射影したものであろうか？事実のみ述べる：



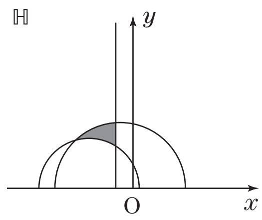
空間内で

$$x^2+y^2-z^2=-1$$

は双曲面を表すが，そこでの最短経路は図のようになる．また，“鞍形”の曲面でも，最短経路をつないだ三角形は図のように，尖った形となる．



この「地“双曲面”」を平面に射影する方法（つまり，地図の作製法）があり，それを実施すると，$\boxed{4}$ の測地線と距離の測り方になることが知られている．つまり，先ほどの図のような図形が，最短経路の像をつないでできる地図上の三角形となる．



この世界では，測地線を１つ与え，その線上にない点を１つ取ると，その点を通り，最初の測地線と共有点をもたないような測地線が無数に存在する．

これも【ユークリッドの平行線公理】に反しており，第２種の非ユークリッド幾何学である．（つまり，図形を考えるときの前提条件が平面とも球面とも違うということ）

まとめると…測地線 l 上にない点を通る l と交わらない平行測地線が，

- 球　面　⇒　存在しない
- 平　面　⇒　１つだけ存在する
- 双曲面　⇒　無数に存在する

ということである．

あなたがノートに定規をおいて２点間の距離を測るとき，「それは本当に測地線だろうか？」と問いかけるわけだ．

図形を考える基本となる距離の測り方によって，面積や体積の測り方も変わってくる．いまは，２次元の曲面（２次元多様体という）で考えているが，これを３次元多様体（宇宙の構造）で考えることがある．

それに関連するサーストンの「幾何化予想」というものがあったが，それを解決したとされるのがペレルマン．しかも，幾何化予想は数学界の大問題「ポアンカレ予想」が成り立つための十分条件であったため，数学界に激震が走った．

話が壮大になったので，最後に第３部では，慣れ親しんだユークリッドの世界に戻ろう．

（よしだ　のぶお／研伸館）