Kenshinkan Math.　集中講義

曲線の長さから見えるもの③　～高校数学で議論する微分幾何～

吉田　信夫

理系への数学　09 年８月号　掲載

第３部　～ユークリッド幾何学での弧長パラメーター～

曲線上のある点から曲線に沿って距離を測るには，速度ベクトルの大きさ（速さ）を積分することになる．逆に，曲線上の点を距離パラメータ（弧長パラメータ）で表すと，動点は等速運動することになる．

$\boxed{5}$　等周で面積最大の図形（山梨大の問題）

L を正の定数とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $u(t)$ $(0\leqq t\leqq L)$ は，$u(0)=u(L)=0$ を満たす微分可能な関数で，$u'(t)$ も連続な関数とする．

$0<t<L$ に対して，$v(t)=\dfrac{u(t)}{\sin\dfrac{\pi}{L}t}$ とおくとき，

$\displaystyle\lim_{t\to+0}v(t)$，$\displaystyle\lim_{t\to+0}v(L-t)$ を $u(t)$，$u'(t)$ を用いて表せ．

(2)　(1) の $u(t)$ に対して，

$$\lim_{a\to+0}\int_a^{L-a}\left\{\{u'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{u(t)\}^2\right\}dt\geqq 0$$

を示せ．また, 等号が成り立つときの $u(t)$ を求めよ．

(3)　曲線 $C:(x(t),\ y(t))$ $(0\leqq t\leqq L)$ がある．$0\leqq t\leqq L$ に対して，$x(t)$，$y(t)$ はともに微分可能で，$x'(t)$，$y'(t)$ は連続とし，$\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2=1$ を満たす．さらに，$0<t<L$ に対して，$x'(t)>0$，$y(t)>0$ かつ $x(0)=0$，$y(0)=y(L)=0$ を満たすとする. このとき，C と x 軸で囲まれる部分の面積を S とすれば,

$$L^2\geqq 2\pi S$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つときの C を図示せよ．

☆　大学入試問題としてかなりの難問．(2) では高度な数学的先見性が求められる．(2) を認めて (3) を示すだけでもなかなか大変だろう．また，

「なぜ (2) は極限で書かれているのか？」

「(3) の等速条件の意味は？」

などの疑問が生じるだろうか．

(1) の解答

微分係数の定義から，求める極限は次の通り：

$$\lim_{t\to+0}v(t)=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{\pi}{L}t}{\sin\frac{\pi}{L}t}\cdot\frac{u(t)-u(0)}{t}\cdot\frac{L}{\pi}$$
$$=\frac{L}{\pi}u'(0),$$
$$\lim_{t\to+0}v(L-t)=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{\pi}{L}t}{\sin\frac{\pi}{L}t}\cdot\frac{u(L-t)-u(L)}{(L-t)-L}\cdot\frac{-L}{\pi}$$
$$=-\frac{L}{\pi}u'(L)$$

（**(1)** の解答おわり）

(2) の解答の前に…

$u(t)$，$u'(t)$ が連続であるから，極限

$$\lim_{a\to+0}\int_a^{L-a}\left\{\{u'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{u(t)\}^2\right\}dt$$

は有限確定値として存在する．

“広義積分の形” ということは，$t=0$，L で定義されない関数 $v(t)$ を利用するということであろう．

(2) の解答

(1) より，$0<t<L$ において

$$u(t)=v(t)\sin\frac{\pi}{L}t,$$
$$u'(t)=v'(t)\sin\frac{\pi}{L}t+\frac{\pi}{L}v(t)\cos\frac{\pi}{L}t$$

$$\therefore\quad \{u'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{u(t)\}^2$$
$$=\frac{\pi^2}{L^2}\{v(t)\}^2\cos\frac{2\pi}{L}t+\frac{\pi}{L}v'(t)v(t)\sin\frac{2\pi}{L}t$$
$$+\{v'(t)\}^2\sin^2\frac{\pi}{L}t$$
$$=\frac{\pi}{2L}\left(\{v(t)\}^2\sin\frac{2\pi}{L}t\right)'+\{v'(t)\}^2\sin^2\frac{\pi}{L}t$$

である（２倍角の公式と積の微分公式を用いた）から，

$$\int_a^{L-a}\left\{\{u'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{u(t)\}^2\right\}dt$$
$$=\int_a^{L-a}\left\{\frac{\pi}{2L}\left(\{v(t)\}^2\sin\frac{2\pi}{L}t\right)'+\{v'(t)\}^2\sin^2\frac{\pi}{L}t\right\}dt$$

$$
\begin{aligned}
&\geqq \frac{\pi}{2L}\int_a^{L-a}\left(\{v(t)\}^2\sin\frac{2\pi}{L}t\right)'dt \\
&= \frac{\pi}{2L}\left[\{v(t)\}^2\sin\frac{2\pi}{L}t\right]_a^{L-a} \\
&= \frac{\pi}{2L}\Big(\{v(L-a)\}^2\sin\frac{2\pi}{L}(L-a) \\
&\qquad -\{v(a)\}^2\sin\frac{2\pi}{L}a\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad &\lim_{a\to+0}\int_a^{L-a}\left\{\{u'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{u(t)\}^2\right\}dt \\
&\geqq \frac{\pi}{2L}\left(\left\{-\frac{L}{\pi}u'(L)\right\}^2\cdot 0-\left\{\frac{L}{\pi}u'(0)\right\}^2\cdot 0\right) \\
&= 0 \ (\because (1))
\end{aligned}
$$

となる．ここで，解答に入る前に述べた通り，

$$\lim_{a\to+0}\int_a^{L-a}\left\{\{u'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{u(t)\}^2\right\}dt$$

は有限確定値として存在するから，極限値の大小比較は可能である．

また，等号成立条件は，

$$
\begin{aligned}
& v'(t)=0 \ (0<t<L) \\
\iff\ & v(t)=\exists A\in\mathbb{R} \ (0\leqq t\leqq L) \\
\therefore\ & u(t)=A\sin\frac{\pi}{L}t \ (0\leqq t\leqq L)\ (\exists A\in\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

である．

ここで，「0 以上の値をとる連続関数で，0 より大きい値をとる点が 1 つでもあれば，定積分の値は 0 より大きくなる」ことを用いた．

（**(2)** の解答おわり）

☆ 上の事実を簡単に確認しておこう（第 1 部の「最短曲線」の議論でも用いた）：

> 十分小さい正の数 ε をとると，連続性から，ある区間で関数値は常に ε より大きくできる．この区間の幅を δ としたら，定積分の値は $\varepsilon\delta$ 以上である．

☆ $\displaystyle\lim_{a\to+0}\int_a^{L-a}\left\{\{u'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{u(t)\}^2\right\}dt$ が有限確定値として存在することが分からなければ，

$$\lim_{a\to+0}\int_a^{L-a}\left\{\{u'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{u(t)\}^2\right\}dt\geqq 0$$

という式は意味をなさない．

実際，被積分関数が連続なので，

$$\int_a^{L-a}\left\{\{u'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{u(t)\}^2\right\}dt$$

は a の関数として見たら微分可能で，当然，連続である．よって，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{a\to+0}\int_a^{L-a}\left\{\{u'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{u(t)\}^2\right\}dt \\
&=\int_0^{L}\left\{\{u'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{u(t)\}^2\right\}dt
\end{aligned}
$$

である．

(3) の解答

$x'(t)>0$，$y(t)>0$ より，

$$S=\int_0^{x(L)}y(t)\,dx=\int_0^{L}y(t)x'(t)\,dt$$

である．

(2) の $u(t)$ を $y(t)$ に変えて，

$$\int_0^{L}\left(\{y'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{y(t)\}^2\right)dt\geqq 0$$

である．これと，

$$\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2=1$$

を利用して，

$$L^2-2\pi\int_0^{L}y(t)x'(t)dt$$

が 0 以上になることを示す．

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{L}\left(\{y'(t)\}^2-\frac{\pi^2}{L^2}\{y(t)\}^2\right)dt \\
&=L-\int_0^{L}\left(\{x'(t)\}^2+\frac{\pi^2}{L^2}\{y(t)\}^2\right)dt \\
\therefore\quad & L^2\geqq L\int_0^{L}\left(\{x'(t)\}^2+\frac{\pi^2}{L^2}\{y(t)\}^2\right)dt
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
&L^2-2\pi\int_0^{L}y(t)x'(t)dt \\
&\geqq L\int_0^{L}\left(\{x'(t)\}^2-2\frac{\pi}{L}y(t)x'(t)+\frac{\pi^2}{L^2}\{y(t)\}^2\right)dt \\
&=L\int_0^{L}\left(x'(t)-\frac{\pi}{L}y(t)\right)^2dt \\
&\geqq 0
\end{aligned}
$$

であり，これで示された．

等号が成立する条件は，(2) を用いて，

$$
\begin{cases}
x'(t)-\dfrac{\pi}{L}y(t)=0 \\
y(t)=A\sin\dfrac{\pi}{L}t \ (\exists A\in\mathbb{R})
\end{cases}
(0\leqq t\leqq L)
$$

$$
\iff
\begin{cases}
x'(t)=\dfrac{\pi}{L}A\sin\dfrac{\pi}{L}t \\
y(t)=A\sin\dfrac{\pi}{L}t
\end{cases}
(0\leqq t\leqq L)
$$

であるが，$x(0)=0$ より，

$$\begin{cases} x(t)=A\left(1-\cos\dfrac{\pi}{L}t\right) \\ y(t)=A\sin\dfrac{\pi}{L}t \end{cases} \quad (0\leqq t\leqq L)$$

であり，

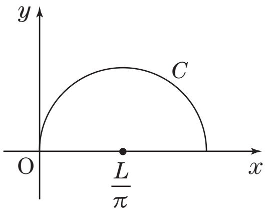
$$\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2=1$$

より，

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{L}{\pi}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{L}t\right) \\ y(t)=\dfrac{L}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{L}t \end{cases} \quad (0\leqq t\leqq L)$$

である．

よって，$L^2=2\pi S$ が成り立つ C は，図のような半円である．



（**(3)** の解答おわり）

☆　等速条件：$\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2=1$ の意味を考えよう．

C 上の動点 $(x(t),\ y(t))$ の速さが常に 1 であるということは，時刻 0 から T までの移動距離，つまり，C の $(0,\ 0)$ から $(x(T),\ y(T))$ までの部分の長さが

$$\int_0^T \sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}\,dt=\int_0^T\ dt=T$$

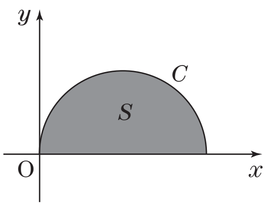
ということである．

よって，C の $(0,\ 0)$ から $(x,\ y)$ までの部分の長さをパラメータ t として

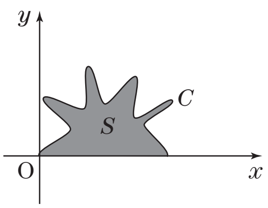
$$(x,\ y)=(x(t),\ y(t))$$

と表しており，L は C の全長である．

さて，この問題において，$x'(t)>0$ の仮定は，S を立式する際に利用しただけで，仮定が無くても，t で置換したら S は同じ積分で表される．



また，終点の x 座標がどこであっても弧長が L で $y\geqq 0$ の部分にある曲線と x 軸で囲まれる部分の部分の面積 S は，同じ積分で表せる．



(3) から，L を固定したら，$L^2\geqq 2\pi S$ が成り立ち，

$L^2=2\pi S$

となるのは半円のときだけである．つまり，このときに S は最大である．これが「等周問題」と呼ばれるもので，『一定の長さのヒモの輪を使って最大面積の図形を作ると円になる』が結論である．

☆　最後に，ヒモを天井に吊るして得られる曲線について考えよう（弧長パラメータを利用する）．

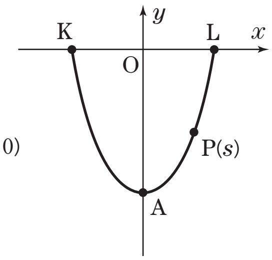
＜カテナリーについての考察＞

水平な天井に $2k$ だけ離れた 2 点 K，L がある．長さが $2l$ のヒモの端点を K，L に固定し，ヒモを天井から吊るす．ただし，$l>k>0$ であり，ヒモは長さ 1 あたりの重さが 1 であるとする．

ヒモの最下点を A とおく．A を通る鉛直方向の直線に関してヒモが対称になることは認めよう．

A からヒモに沿って L 側に s だけ離れた点を $\mathrm{P}(s)$ とする $(0\leqq s\leqq l)$．$\mathrm{P}(s)$ と $\mathrm{P}(s+\Delta s)$ $(\Delta s>0)$ の間の部分に働く張力と重力の釣り合いを考えると，適当な座標系における微分方程式を構成できる．それを利用して，ヒモの形（カテナリー，懸垂線）を表す方程式が $y=\alpha(e^{\beta x}+e^{-\beta x})+\gamma$ という形で表せることを示す．（ただし，曲線が滑らかであることは仮定する．）

証明



図のように座標を設定する．つまり，

$$\mathrm{K}(-k,\ 0),\ \mathrm{L}(k,\ 0)$$

である．

また，

$$\mathrm{P}(s)=(x(s),\ y(s))\quad (0\leqq s\leqq l)$$
$$(x(l)=k,\ y(l)=0,\ x(0)=0)$$

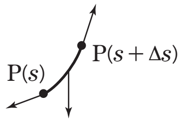
とおく．ここで，s は曲線の長さであるから，

$$s=\int_0^s\sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2+\left(\dot{y}(t)\right)^2}\,dt\quad (0\leqq s\leqq l)$$

$$\therefore\quad \left(\dot{x}(s)\right)^2+\left(\dot{y}(s)\right)^2=1\quad (0\leqq s\leqq l)$$

が成り立つ．（ $\dot{}$ は s での微分を表す）

いま，P(s) における張力の大きさを $T(s)$ とおくと，微小区間での張力と重力の釣り合いから，



$$-T(s)\begin{pmatrix}\dot{x}(s)\\ \dot{y}(s)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -\Delta s\end{pmatrix}+T(s+\Delta s)\begin{pmatrix}\dot{x}(s+\Delta s)\\ \dot{y}(s+\Delta s)\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$$\therefore\ \begin{cases}\dfrac{T(s+\Delta s)\dot{x}(s+\Delta s)-T(s)\dot{x}(s)}{\Delta s}=0\\ \dfrac{T(s+\Delta s)\dot{y}(s+\Delta s)-T(s)\dot{y}(s)}{\Delta s}=1\end{cases}$$

が成り立つ．$\Delta s\to 0$ として，

$$\begin{cases}\dfrac{d}{ds}(T(s)\dot{x}(s))=0\\ \dfrac{d}{ds}(T(s)\dot{y}(s))=1\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}T(s)\dot{x}(s)=a\\ T(s)\dot{y}(s)=s+b\end{cases}\ (\exists a,\ b\in\mathbb{R},\ a>0)$$

であるから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}(s)}{\dot{x}(s)}=\frac{1}{a}s+\frac{b}{a}=\frac{1}{a}\int_0^{x(s)}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx+\frac{b}{a}$$

となる．$s=0$ において $x=0$，$\dfrac{dy}{dx}=0$ であるから，$b=0$ となることが分かり，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a}\int_0^{x(s)}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\quad\left(\because\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0\right)$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{dy}{dx}\ \text{かつ}\ \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\frac{1}{a}$$

である．

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\Longleftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)\\ \dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{dy}{dx}=Ae^{-\frac{1}{a}x}\\ \dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{dy}{dx}=Be^{\frac{1}{a}x}\end{cases}\ (\exists A,\ B\in\mathbb{R})$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{a}{2}\left(Be^{\frac{1}{a}x}-Ae^{-\frac{1}{a}x}\right)$$

より，

$$y=a^2\cdot\frac{Be^{\frac{1}{a}x}+Ae^{-\frac{1}{a}x}}{2}+C\ (\exists A,\ B,\ C\in\mathbb{R})$$

であり，初期条件：$\dfrac{dy}{dx}=0$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{a}$ $(x=0)$ から，

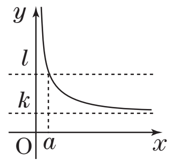
$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{1}{a}x}+e^{-\frac{1}{a}x}\right)+C\ \left(A=B=\frac{1}{a}\right)$$

である．また，$x=k$ で $y=0$ であるから，

$$C=-\frac{a}{2}\left(e^{\frac{1}{a}k}+e^{-\frac{1}{a}k}\right)$$

である．さらに，ヒモの長さの情報から，a は

$$l=\int_0^k\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\frac{1}{a}\cdot\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=k}=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{1}{a}k}-e^{-\frac{1}{a}k}\right)$$



$$y=\frac{x}{2}\left(e^{\frac{k}{x}}-e^{-\frac{k}{x}}\right)$$

を満たす数である（a が 1 つしかないことが右のグラフから分かる！）．

これで題意は示された．

（証明おわり）

☆　弧長パラメータを設定したおかげで，簡単に微分方程式を作ることができた！

☆　a が 1 つだけあることを確認するには，

$$l=\frac{k}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{t}\ \left(t=\frac{1}{a}k\right)$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{l}{k}t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

と変形する方が分かりやすいかも知れない．

終わりに…

“曲線の長さ”に関連付けて，『非ユークリッド幾何学』や『ヒモの安定な形』について議論しました．

高校生にとっては，少し先で学ぶ大学数学の一端を垣間見て，大学入試数学への取り組みがより能動的なものになってくれたら幸いです．

大学生以上の方には，微分幾何を高校数学で見る 1 つのアプローチとして楽しんでもらえたら光栄です．

（よしだ　のぶお／研伸館）