数学集中講義

和と戯れる ②　～和の世界のさらなる奥地へ～

吉田　信夫

大学への数学　09 年 11 月号　掲載

まず，次の問題を通じて前回（8 月号）の復習から．

例題 1.　$\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot 2^{k-1}$ を求めよ．

$$(x^2e^x)' = (x^2+2x)e^x$$

から，$\{n^2 \cdot 2^{n-1}\}$ の“階差数列”と“和の数列”は $n^2 \cdot 2^{n-1}$ に近い形と予想できる！

ここで，$S = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ としたら，

$$\begin{array}{rl} S = & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots\cdots + n\cdot 2^{n-1} \\ -)\ 2S = & \qquad 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + \cdots\cdots + (n-1)2^{n-1} + n\cdot 2^n \\ \hline -S = & 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2^2 + \cdots\cdots + 1\cdot 2^{n-1} - n\cdot 2^n \end{array}$$

$$= \frac{2^n-1}{2-1} - n\cdot 2^n$$

$$= -(n-1)2^n - 1$$

$$\therefore \quad S = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

である．これを既知として，様々な解法を紹介する．

解 1　［$S-2S$ で $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ を作る］

$S = \sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 2^{k-1}$ として，

$$\begin{array}{rl} S = & 1\cdot 1 + 4\cdot 2 + 9\cdot 2^2 + \cdots\cdots + n^2\cdot 2^{n-1} \\ -)\ 2S = & \qquad 1\cdot 2 + 4\cdot 2^2 + \cdots + (n-1)^2 2^{n-1} + n^2\cdot 2^n \\ \hline -S = & 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + (2n-1)2^{n-1} - n^2\cdot 2^n \end{array}$$

$$= \underline{\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\cdot 2^{k-1}} - n^2\cdot 2^n$$

$$= \underline{2\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}} - n^2\cdot 2^n$$

$$= 2\{(n-1)2^n + 1\} - \frac{2^n-1}{2-1} - n^2\cdot 2^n$$

$$= -(n^2-2n+3)\cdot 2^n + 3$$

$$\therefore \quad S = \sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 2^{k-1} = \boldsymbol{(n^2-2n+3)2^n - 3}$$

である．

⇨**注**　下線部は，$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ を使うために展開したが，通常は，展開せずに，そのまま上の $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ と同様にして求める (下線部を T とおいて，$T-2T$ から計算する)．

解 2　［微分を利用］

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-x}{x-1} \quad (x \fallingdotseq 1)$$

の両辺を x で微分すると，

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k\cdot x^{k-1},$$

$$\left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)' = \frac{\{(n+1)x^n-1\}(x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} k\cdot x^{k-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

となる．この両辺に x をかけて，

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot x^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$$

である．さらに，両辺を x で微分すると，

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\cdot x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k^2\cdot x^{k-1},$$

$$\left(\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{(x-1)^4}\times\Big\{\big(nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x\big)'(x-1)^2$$

$$-\big(nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x\big)\cdot 2(x-1)\Big\}$$

$$= \frac{n(n+2)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1}{(x-1)^2}$$

$$-2\cdot\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^3}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} k^2\cdot x^{k-1} = \frac{n(n+2)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1}{(x-1)^2}$$

$$-2\cdot\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^3}$$

となり，$x=2$ を代入すると，

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 2^{k-1} = n(n+2)2^{n+1} - (n+1)^2 2^n + 1$$

$$-2\{n\cdot 2^{n+2} - (n+1)2^{n+1} + 2\}$$

$$= \boldsymbol{(n^2-2n+3)2^n - 3}$$

である．

解 3　［差に分けて打ち消す（階差数列）］

数列 $\{n^2\cdot 2^{n-1}\}$ において，

$$(k+1)^2 2^k - k^2\cdot 2^{k-1} = \{2(k+1)^2 - k^2\}2^{k-1}$$

$$= (k^2+4k+2)2^{k-1}$$

である．$1 \leqq k \leqq n$ として，両辺の和を計算すると，

$$(\text{左辺})=(4\cdot2-1\cdot1)+(9\cdot2^2-4\cdot2)+\cdots\cdots\cdots+\{(n+1)^2 2^n-n^2\cdot2^{n-1}\}$$
$$=(n+1)^2 2^n-1$$

$$(\text{右辺})=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot2^{k-1}+4\sum_{k=1}^{n}k\cdot2^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}2^k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot2^{k-1}+4\{(n-1)2^n+1\}+\frac{2(2^n-1)}{2-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot2^{k-1}+(4n-2)2^n+2$$

となるので,

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot2^{k-1}+(4n-2)2^n+2=(n+1)^2 2^n-1$$
$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}k^2\cdot2^{k-1}=\boldsymbol{(n^2-2n+3)2^n-3}$$

である.

解 4　[和の形を予想して逆算]

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2\cdot2^n\quad(n\geqq1)$$

なる数列 $\{a_n\}$ をとる．$n=1$ のとき $a_1=2$ であり，$n\geqq2$ のとき,

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$
$$=n^2\cdot2^n-(n-1)^2 2^{n-1}$$
$$=n^2\cdot2^{n-1}+2\cdot n\cdot2^{n-1}-2^{n-1}$$

である．これは $n=1$ でも成り立つ．ゆえに,

$$n^2\cdot2^{n-1}=a_n-2\cdot n\cdot2^{n-1}+2^{n-1}$$

となり，これを加えていくと,

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot2^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}a_k-2\sum_{k=1}^{n}k\cdot2^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}$$
$$=n^2\cdot2^n-2\{(n-1)2^n+1\}+\frac{2^n-1}{2-1}$$
$$=\boldsymbol{(n^2-2n+3)2^n-3}$$

が得られる.

解 5　[漸化式を利用した裏技]

$a_n=an^2+bn+c$ なる数列 $\{a_n\}$ が，漸化式

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+n^2\quad(n\geqq1)\quad\cdots\cdots\cdots\quad(*)$$

を満たすとする.

$$a(n+1)^2+b(n+1)+c=\frac{1}{2}(an^2+bn+c)+n^2$$

がすべての自然数 n で成り立つことは,

$$a(x+1)^2+b(x+1)+c=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)+x^2$$

がすべての実数 x で成り立つことと同値なので，後者で考える．これは，2 次の恒等式なので，最高次の係数比較と $x=0,\ -1$ の代入で必要十分条件が得られ,

$$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}a+1\\ a+b+c=\dfrac{1}{2}c\\ c=\dfrac{1}{2}(a-b+c)+1\end{cases}\iff\begin{cases}a=2\\ b=-8\\ c=12\end{cases}$$

$$\therefore\quad a_n=2n^2-8n+12$$

である．ここで，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=2^{n-1}a_n$$
$$=(2n^2-8n+12)2^{n-1}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(\#)$$

で定義すると，$(*)$ の両辺に 2^n をかけて,

$$2^n a_{n+1}=2^{n-1}a_n+2\cdot n^2\cdot2^{n-1}$$
$$\therefore\quad b_{n+1}=b_n+2\cdot n^2\cdot2^{n-1}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(*)'$$

となる．$(\#)$ より，$b_1=6$ であるから,

$$b_n=6+2\sum_{k=1}^{n-1}k^2\cdot2^{k-1}$$
$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n-1}k^2\cdot2^{k-1}=\frac{b_n-6}{2}$$

である．よって,

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot2^{k-1}=\frac{b_{n+1}-6}{2}$$
$$=\frac{b_n+2\cdot n^2\cdot2^{n-1}-6}{2}\quad(\because\ (*)')$$
$$=\boldsymbol{(n^2-2n+3)2^n-3}\quad(\because\ (\#))$$

である.

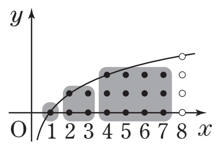
*　　　　　*

ここまでが前回の復習である．ここで前回のテーマ：

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot2^{k-1}=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots\cdots\cdots+n\cdot2^{n-1}$$

を見つめ直そう.

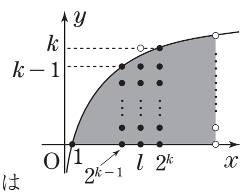
$n=3$ の場合



実は，図のように考えて，$\sum_{k=1}^{n}k\cdot2^{k-1}$ は，領域

$$D:0<x<2^n,\quad 0\leqq y\leqq\log_2 x$$

内の格子点の個数である（以下で一般的に考える).



$1\leqq k\leqq n$ なる k を固定する．$2^{k-1}\leqq l<2^k$ なる l に対し，D を直線：$x=l$ で切ると,

$$k-1\leqq\log_2 l<k$$

より，切り口の線分上の格子点は

$$(k-1)-0+1=k\quad(\text{個})$$

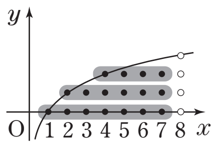
ある．ゆえに，$2^{k-1}\leqq x<2^k$ を満たす D 内の格子点は

$$k\{(2^k-1)-2^{k-1}+1\}=k\cdot2^{k-1}\quad(\text{個})$$

ある．これを $1\leqq k\leqq n$ で加えると，D 内の格子点の総数は $\sum_{k=1}^{n}k\cdot2^{k-1}$ である.

次に，図のように“横一列”ごとに数えてみよう．

$\boxed{n=3\text{ の場合}}$

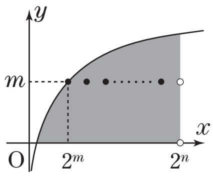


$0 \leqq m < n$ なる m に対し，直線：$y=m$ で D を切った線分上の格子点は

$(2^m,\ m),\ (2^m+1,\ m),$
$\cdots\cdots,\ (2^n-1,\ m)$

であり，その個数は

$(2^n-1)-2^m+1$
$=2^n-2^m$ （個）



である．ゆえに，D 内の格子点数は，

$$\sum_{m=0}^{n-1}(2^n-2^m)=n\cdot 2^n-\frac{2^n-1}{2-1}$$
$$=(n-1)2^n+1$$

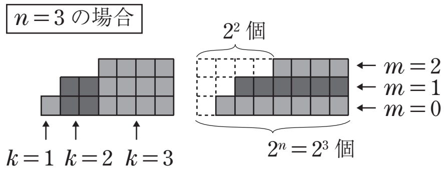
と計算できる．よって，

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}=(n-1)2^n+1$$

である（これが最もエレガントかも知れない）．

格子点の個数で考える方法が思いつきにくい場合は，次図のように，$k\cdot 2^{k-1}$ を“縦 k，横 2^{k-1} の長方形状に積んだブロックの個数”と考える：

$\boxed{n=3\text{ の場合}}$



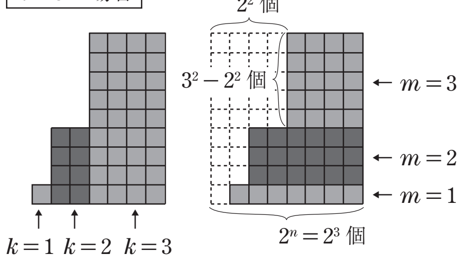
左のように，“同じ高さまで積まれた部分”ごとにまとめて数えたものが $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ であり，右のように，“横一列”ごとに数えたものが $\sum_{m=0}^{n-1}(2^n-2^m)$ である．

では，この方法で **例題** 1 を考えてみよう．

解 6 ［ブロック化の利用］

次図のように，$k^2\cdot 2^{k-1}$ を“縦 k^2，横 2^{k-1} の長方形状に積んだブロックの個数”と考える：

$\boxed{n=3\text{ の場合}}$



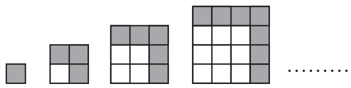
左のように，“同じ高さまで積まれた部分”ごとにまとめて数えたものが $\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 2^{k-1}$ である．また，右のように“同じ横幅の部分”ごとにまとめて数えると，

$$\sum_{m=1}^{n}\{m^2-(m-1)^2\}(2^n-2^{m-1})$$
$$=2^n\underline{\sum_{m=1}^{n}(2m-1)}-2\sum_{m=1}^{n} m\cdot 2^{m-1}+\sum_{m=1}^{n}2^{m-1}$$
$$=\underline{n^2}\cdot 2^n-2\{(n-1)2^n+1\}+\frac{2^n-1}{2-1}$$
$$=(n^2-2n+3)2^n-3$$

である．よって，

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 2^{k-1}=\boldsymbol{(n^2-2n+3)2^n-3}$$

である．下線部で，「正の奇数を 1 から順に n 個加えたら n^2 になる」を用いた．これは，“等差数列の和”であるが，



とブロックで考えることもできる．

（すべての解答終わり）

ここまでをまとめると，『和を求める』といえば…

0) 公式などの定石を利用

1) 「差に分けて打ち消す」の応用
 ○ 関係式を作る
 ○ 和の形を予想して，逆算する

2) 違う計算の結果に帰着
 ○ 漸化式を利用する
 ○ ブロックにして可視化する

3) 恒等式を微分，積分

*　　　　　*

最後に，“和の和（2 重和）”を使って，上を実践してみよう．そのために，計算例を 1 つ挙げておく．

例 $S=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{m=1}^{k}(m+k)\right\}$ を求めるには，まず，内側の Σ を計算する．その際に，変数は m であり，k は定数として扱うことに注意する．

$$\sum_{m=1}^{k}(m+k)=\frac{k(k+1)}{2}+k^2=\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k$$

より，求める和は，

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k\right)\\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)^2}{2}
\end{aligned}
$$

である．

＊　　　　＊

2重和の問題を1つ．どうやって計算可能にするか？

例題 2.　分母，分子が自然数の分数を次の規則に従って並べる：

①　分母と分子の和によって群に分ける．

②　各群では分母が大きいものから並べる．

［第1群］　$a_1=\dfrac{1}{1}$

［第2群］　$a_2=\dfrac{1}{2}$，$a_3=\dfrac{2}{1}$

［第3群］　$a_4=\dfrac{1}{3}$，$a_5=\dfrac{2}{2}$，$a_6=\dfrac{3}{1}$

………

第 n 群に含まれる分数全体の和を b_n とおき，

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とおく．さらに，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく．

（1）　S_n を n と T_n の式で表せ．

（2）　b_n を n と T_n の式で表せ．

（2）で b_n を考えさせられるので，（1）が「b_k を求めてから S_n を求める」という流れではないことが分かる．

解　（1）まず，b_k をバラバラにすると，

$$b_k=\frac{1}{k}+\frac{2}{k-1}+\cdots\cdots\cdots+\frac{k}{1}$$

となるので，S_n を全てバラバラにすると，

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{2}+\frac{3}{1}\right)+\cdots\cdots\\
&\quad\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n-1}+\cdots\cdots\cdots+\frac{n}{1}\right)
\end{aligned}
$$

となる．分母が同じ分数ごとにまとめなおすと，

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1+2+\cdots\cdots\cdots+n}{1}+\frac{1+2+\cdots\cdots\cdots+(n-1)}{2}\\
&\quad+\cdots\cdots\cdots+\frac{1+2}{n-1}+\frac{1}{n}\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}\\
&\quad+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{2\cdot3}{2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1\cdot2}{2}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\cdot\frac{(n+1-i)(n+2-i)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{i}+i-(2n+3)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{(n+1)(n+2)T_n+\frac{n(n+1)}{2}-n(2n+3)\right\}\\
&= \boldsymbol{\frac{2(n+1)(n+2)T_n-3n^2-5n}{4}}
\end{aligned}
$$

となる．

（2）　$n=1$ のとき，$b_1=1$ である．$n\geqq2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
b_n &= S_n-S_{n-1}\\
&= \frac{2(n+1)(n+2)T_n-3n^2-5n}{4}\\
&\quad-\frac{2n(n+1)T_{n-1}-3(n-1)^2-5(n-1)}{4}\\
&= \frac{(n+1)}{2}\left\{(n+2)T_n-nT_{n-1}\right\}-\frac{3n+1}{2}\\
&= \frac{(n+1)}{2}\left\{n(T_n-T_{n-1})+2T_n\right\}-\frac{3n+1}{2}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$n\geqq2$ において，

$$T_n-T_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{(n+1)}{2}\left(n\cdot\frac{1}{n}+2T_n\right)-\frac{3n+1}{2}\\
&= (n+1)T_n+\frac{n+1}{2}-\frac{3n+1}{2}\\
&= (n+1)T_n-n
\end{aligned}
$$

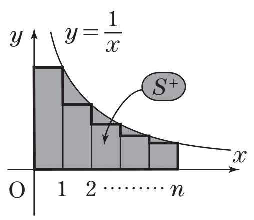
である．$T_1=1$ より，これは $n=1$ でも成り立つので，

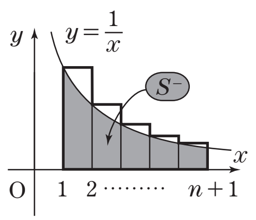
$$\boldsymbol{b_n=(n+1)T_n-n}$$

である．

＊　　　　＊

T_n を求めることはできない．数Ⅲでは，T_n が以下の太線で囲まれた部分の面積であることを利用して，





$$
\begin{aligned}
T_n &\leqq S^+=1+\int_1^n\frac{dx}{x}=1+\Big[\log x\Big]_1^n\\
&= \log n+1,\\
T_n &> S^-=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^{n+1}\\
&= \log(n+1)
\end{aligned}
$$

と評価する（上の不等式は $n=1$ で等号が成立する）．

（よしだ　のぶお，予備校講師）