Kenshinkan Math.　集中講義

２次曲線の挙動　～無限の彼方へ～

吉田　信夫

理系への数学　10 年 1 月号　掲載

＝　概　要　＝

本稿では，以下のような流れで，離心率が変化するときの 2 次曲線の変化を，無限遠点から眺める手順を紹介する．また，その方法で図形の反転の様子を観察する．

0.　離心率と２次曲線

1.　無限遠点の図示

2.　２次曲線の挙動

3.　無限遠点による図形の解釈

0.　離心率と２次曲線

●　２次曲線とは，

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\in\mathbb{R})$$

の形で表現できる図形の総称である．通常，2 次曲線というときは，以下のようなものは除く：

○　$a=b=c=0$ のとき，$dx+ey+f=0$ は直線

○　$a=c=d=e=f=0$，$b=1$ のとき，$xy=0$ は 2 つの直線

○　$b=d=e=f=0$，$a=c=1$ のとき，$x^2+y^2=0$ は 1 点

○　$a=c=f=1$，$b=d=e=0$ のとき，$x^2+y^2+1=0$ を満たす点は存在しない

●　2 次曲線は合同変換 (平行移動，回転移動，対称移動) を施すことで，次の 3 種類の形 (標準形) にできることが知られている：

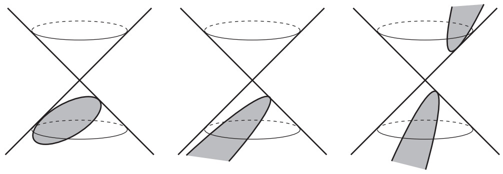
○　楕　円：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>0,\ b>0)$

○　双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ または

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$　$(a>0,\ b>0)$

○　放物線：$y^2=4px$

●　少し図形的にみると，2 次曲線は，円錐面を平面で切って得られる曲線である：

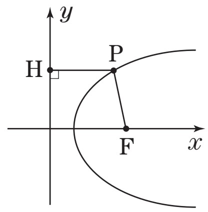


●　焦点と準線を利用した定義も可能である．

2 次曲線は，準線 l と焦点 F を与えたとき，正の定数 e（離心率）に対し，

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=e$$

をみたす点 P の軌跡として表現できる．ただし，点 H は点 P から直線 l に引いた垂線の足である．



本稿では，簡単のために，準線 $l:x=0$ とし，焦点 $\mathrm{F}(1,\ 0)$ とする．では，上記を再確認しておこう：

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=e \iff e|x|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$\iff (1-e^2)x^2-2x+y^2+1=0$$

となる．これを曲線 C_e と表すことにすると，

1)　$1-e^2>0$ つまり $0<e<1$ のとき，C_e は楕円

2)　$1-e^2=0$ つまり $e=1$ のとき，C_e は放物線

3)　$1-e^2<0$ つまり $1<e$ のとき，C_e は双曲線

である．ここで，（強引にではあるが）$e=0$，∞ の場合も合わせて考えておくと，

0)　$e=0$ のとき，

$$C_0:(x-1)^2+y^2=0$$

$\iff$　$(x,\ y)=(1,\ 0)$　（焦点）

4)　$e=\infty$ のとき，

$$x^2+\frac{-2x+y^2+1}{1-e^2}=0$$

$\to$　$C_\infty:x=0$　$(e\to\infty)$　（準線）

である．

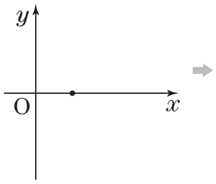
これらについては，次のようなイメージをもっておいて欲しい：

$y=0$ のとき，

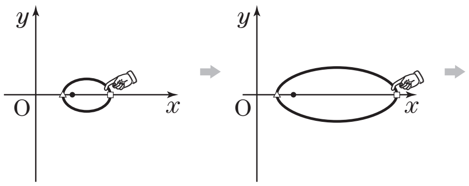
$$x=\frac{1}{1+e},\ \frac{1}{1-e}\quad (e\neq 1)$$

であることに注意して，e を 0 から∞まで変化させる．

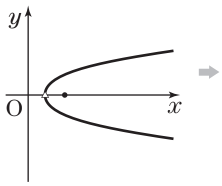
0)　$e=0$



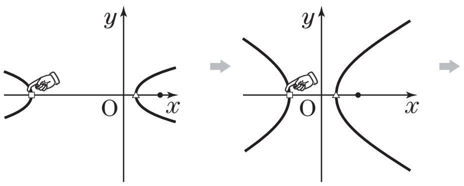
1)　$0<e<1$



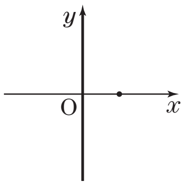
2)　$e=1$



3)　$1<e$



4)　$e=\infty$



整理すると，

> 0)　最初は「焦点」のみ．
> 1)　両サイドに引っ張られて「楕円」になる．
> 2)　引っ張り続けると，右端が無限の彼方で切れて「放物線」になる．
> 3)　さらに引っ張り続けると，切れた右端が反対側から戻ってきて，「双曲線」になる．
> 4)　最終的には「準線」に収束する．

●　平面での円錐面の切断によってこれを解釈する．

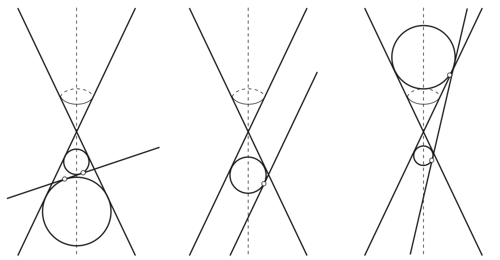
実は，“切断した平面”と“円錐面に接し，中心が中心線上にある球面”との接点が焦点になる．これを踏まえると，平面を徐々に傾けていくとき，球面（焦点）の挙動は以下の通りである：

1)「楕円」になる場合，同じ側に球面が 2 つあり，焦点は 2 つある．

2)「放物線」になる場合，球面の 1 つが無限の彼方へ飛んでいってしまう．同時に焦点の 1 つも無限の彼方へ飛んでいくから，焦点は 1 つになる．

3)「双曲線」になる場合，無限の彼方に飛んでいった球面（焦点）が反対側から戻ってきている．

1)　2)　3)



奇妙であるが，そう考えざるを得ない．これを，もっと納得できるように表現できないだろうか？

1.　無限遠点の図示

空間内の単位球面

$$S=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}$$

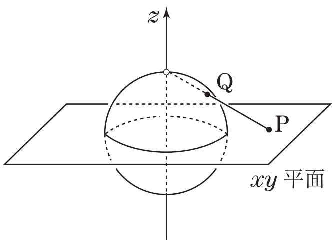
から 1 点 $\mathrm{Q}_\infty(0,\ 0,\ 1)$ を除いたものを S' とおく．

xy 平面上の点全体の集合から S' への写像

$$f:\{\mathrm{P}(x,\ y)\,|\,x,\ y\in\mathbb{R}\}\ \longrightarrow\ S'$$

を以下で定める：

> xy 平面上の点 P と Q_∞ を結ぶ直線と単位球面 S との交点のうち Q_∞ でないものを $f(\mathrm{P})$ とする．



これを式で書こう．

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，$f(\mathrm{P})=\mathrm{Q}(X,\ Y,\ Z)$ とおくと，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}_\infty}+k\overrightarrow{\mathrm{Q}_\infty\mathrm{P}} & (k\fallingdotseq 0)\\ X^2+Y^2+Z^2=1\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}(X,\ Y,\ Z)=(kx,\ ky,\ -k+1)\\ X^2+Y^2+Z^2=1\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{2}{x^2+y^2+1}\\ (X,\ Y,\ Z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+1}(2x,\ 2y,\ x^2+y^2-1)\end{cases}$$

である．（明らかに単射！）

逆に，S' の点 $\mathrm{Q}(X,\ Y,\ Z)$ に対し，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}_\infty}+k\overrightarrow{\mathrm{Q}_\infty\mathrm{Q}}\\ z=0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\ (x,\ y,\ 0)=(kX,\ kY,\ k(Z-1)+1)$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{1}{1-Z}\\ (x,\ y)=\dfrac{1}{1-Z}(X,\ Y)\end{cases}$$

となる xy 平面の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとると，$f(\mathrm{P})=\mathrm{Q}$ である．（つまり，全射！）

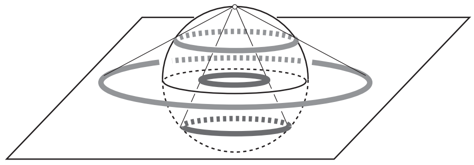
以上から，この全単射 f，および，その逆写像 f^{-1} を式で表すと以下の通りである：

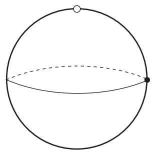
$$\begin{aligned}f(x,\ y)&=(X,\ Y,\ Z)\\&=\frac{1}{x^2+y^2+1}(2x,\ 2y,\ x^2+y^2-1)\\ f^{-1}(X,\ Y,\ Z)&=(x,\ y)\\&=\frac{1}{1-Z}(X,\ Y)\quad(Z\fallingdotseq 1)\end{aligned}$$

☆　ここまで考えると，(0，0，1) を Q_∞ と表す意味も納得いくだろう（もちろん，原点 O から限りなく離れた点全体を１点 Q_∞ に集約して表しているからである）．Q_∞ を“無限遠点”と呼ぶこともある．

$$f(xy\text{ 平面})\cup \mathrm{Q}_\infty=S$$

であるから，この写像による像を考えれば，「無限の彼方での挙動」を含めて，xy 平面上の図形の「単位球面に射影した像」を目で見ることが可能となる．

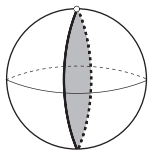




ここで，f による焦点 (1，0) の像は

$$f(1,\ 0)=(1,\ 0,\ 0)$$

であり，準線：$x=0$ の像は



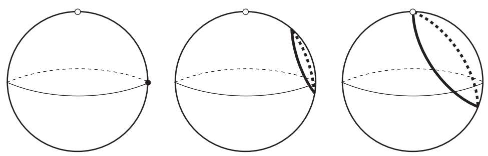
$$\begin{aligned}x=0\ &\Longleftrightarrow\ \frac{X}{1-Z}=0\\ &\Longleftrightarrow\ X=0,\ Z\fallingdotseq 1\end{aligned}$$

である．

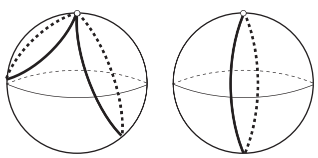
2.　２次曲線の挙動

結論から述べると，C_e の f による像（射影）は以下のようになる：

0)　$e=0$　　1)　$0<e<1$　　2)　$e=1$



3)　$1<e$　　4)　$e=\infty$



（ここで，各曲線は円ではないことを注意しておく．）

離心率 e を 0 から ∞ まで変化させるときの２次曲線の挙動がよく見えるだろう！

以下でこの結論が導かれる過程をみていこう．

f による C_e の像は，

$$\begin{cases}(1-e^2)\dfrac{X^2}{(1-Z)^2}-2\dfrac{X}{1-Z}+\dfrac{Y^2}{(1-Z)^2}+1=0\\ X^2+Y^2+Z^2=1 \quad (Z\fallingdotseq 1)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}e^2X^2=2(X-1)(Z-1)\\ X^2+Y^2+Z^2=1 \quad (Z\fallingdotseq 1)\end{cases}$$

である．

0)　$X=1$ であるならば，

$$Y=Z=e=0$$

である．つまり，

$$f(C_0)=\{(1,\ 0,\ 0)\}$$

である．

4)　$$X^2=\frac{2(X-1)(Z-1)}{e^2} \quad\to\quad X=0 \quad (e\to\infty)$$

より，$f(C_\infty)$ は円

$$Y^2+Z^2=1,\ X=0$$

から Q_∞ を除いたものである．

1)〜3)　以後，$X\fallingdotseq 1$，$e>0$ の場合を考える．

$$\begin{aligned}Z&=\frac{e^2X^2}{2(X-1)}+1\\ &=\frac{e^2}{2(X-1)}+\frac{e^2}{2}X+\frac{e^2}{2}+1\end{aligned}$$

において，漸近線は

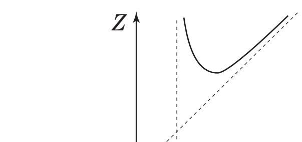
$$X=1\ \&\ Z=\frac{e^2}{2}X+\frac{e^2}{2}+1$$

であり，

$$\frac{dZ}{dX}=\frac{e^2X(X-2)}{2(X-1)^2}$$

より，増減表，および，XZ 平面におけるグラフ C は以下の通りである（C は双曲線である）．

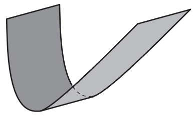
X	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$\dfrac{dZ}{dX}$	$+$	0	$-$	$/$	$-$	0	$+$
Z	${}_{-\infty}\nearrow$	1	$\searrow_{-\infty}$	$/$	${}^{+\infty}\searrow$	$2e^2+1$	$\nearrow^{+\infty}$

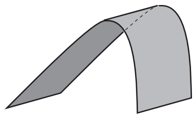


よって，XYZ 空間内で，

$$Z=\frac{e^2X^2}{2(X-1)}+1$$

は右のような曲面を表す（双曲線柱である）．





この曲面と

$$S'=S-\{\mathrm{Q}_\infty\}$$

の共有点全体が $f(C_e)$ である．共有点を調べるには，XZ 平面 $(Y=0)$ への射影，つまり，C と単位円板

$$D: X^2+Z^2\leqq 1$$

の共有点を調べると良い．D の境界の方程式

$$X^2+Z^2=1$$

を C の方程式に代入すると，

$$X^2+\frac{e^4X^4}{4(X-1)^2}+\frac{e^2X^2}{X-1}+1=1$$
$$(-1\leqq X\leqq 1)$$

であり，$X\fallingdotseq 1$ より，

$$X^2\{(e^4+4)X^2+4(e^2-2)X+4(1-e^2)\}=0$$
$$(-1\leqq X<1)$$

である．

ここで，$X=0$ とすると，C の方程式より

$$Z=1$$

となり，Q_∞ において S と接することを意味する．

次に，X の２次方程式

$$(e^4+4)X^2+4(e^2-2)X+4(1-e^2)\}=0$$

の $-1\leqq X<1$ をみたす実数解を調べることで，Q_∞ 以外の共有点を調べる．左辺を $g(X)$ とおくと，

$$(\text{判別式})/4=4e^6>0,$$

$$g(1)=e^4>0,$$

$$g(-1)=(e^2-4)^2\geqq 0,$$

$$g(0)=1-e^2$$

である．

1)　$0<e<1$ のとき，

$$g(0)>0$$

であり，軸について，

$$0<-\frac{2(e^2-2)}{e^4+4}<1$$
$$\iff \quad 0<e<\sqrt{2}$$

より，　$0<X<1$ の範囲に異なる２つの実数解をもつ．

2)　$e=1$ のとき，

$$g(X)=5X^2-4X$$

より，

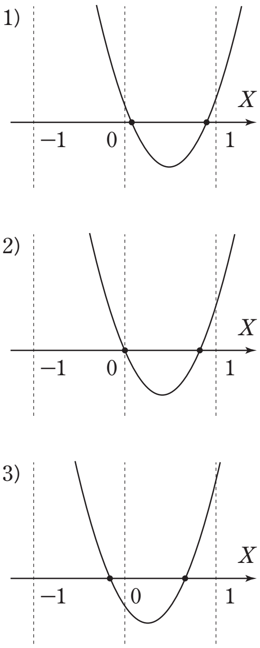
$$g(X)=0$$
$$\iff \quad X=0,\ \frac{4}{5}$$

である．

3)　$1<e$ のとき，

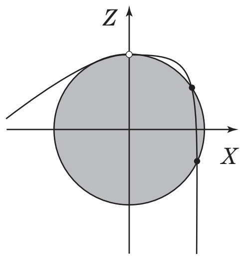
$$g(0)<0$$

より，$-1 \leqq X<0$ と $0<X<1$ の範囲に１個ずつ実数解をもつ．

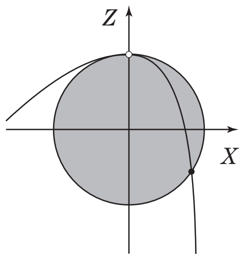


以上より，$e>0$ のときの C，D の共有点は以下のようになる：

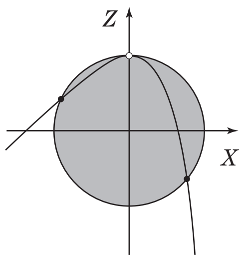
1)　$0<e<1$



2)　$e=1$

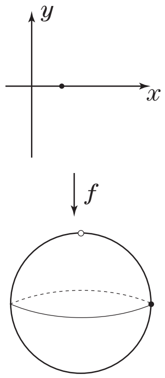


3)　$1<e$

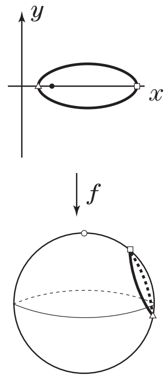


これより，先に述べた結論が導かれる．合わせて，e が０から ∞ まで変化するときの挙動も表しておく．

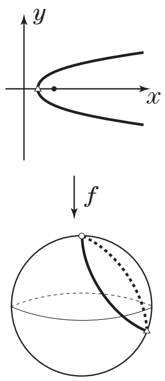
0)　$e=0$



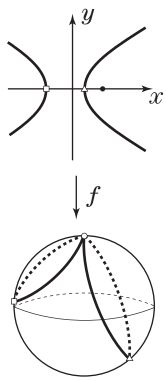
1)　$0<e<1$



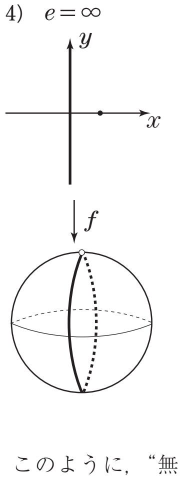
2)　$e=1$



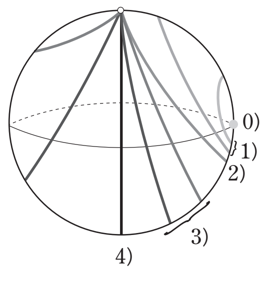
3)　$1<e$



4)　$e=\infty$



＜総括＞



このように，“無限遠点を利用した球面への射影”によって見える図形的性質がある．そのような例をもう少し挙げておく．

3. 無限遠点による図形の解釈

● 3.1 アポロニウスの円

A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ とする．

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=m:n \quad (m>0,\ n>0)$$

をみたす点 P の軌跡は，以下のようになる：

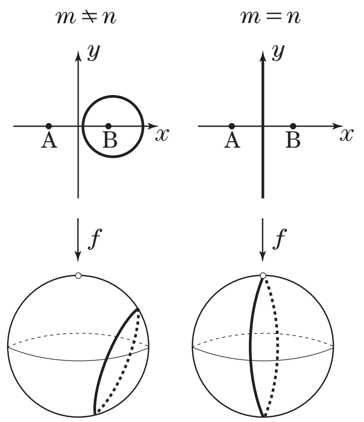
1) $m \fallingdotseq n$ のとき，中心が直線 AB 上にあり，AB を $m:n$ に内分，外分する点を通る円

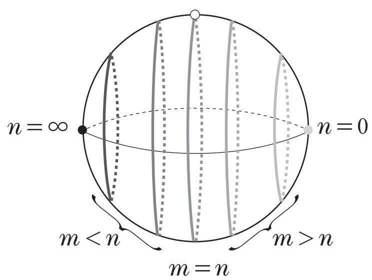
2) $m=n$ のとき，線分 AB の垂直２等分線 l

ここで無限遠点の考え方を使うと，この場合分けは不要となる．つまり，f による l の像 $f(l)$ は

$$X^2+Y^2+Z^2=1,\ Y=0$$

となるから，l は「中心が直線 AB 上にあり，線分 AB の中点と無限遠点を通る円」と考えることができる．





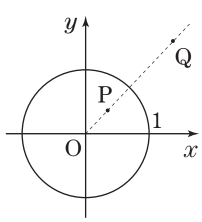
● 3.2 反転

平面上の２点 P，Q (P$\fallingdotseq$O，Q$\fallingdotseq$O) が単位円に関して“反転の位置”にあるとは，

Q が半直線 OP 上で

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$$

が成り立つことをいう．



P$(x,\ y)$，Q$(x',\ y')$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{(x')^2+(y')^2}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

なる関係が成り立つ．ここで考察したいのは，点 P がある図形 C 上を動くとき，その反転の位置にある点 Q が描く図形 C' についてである．一般的には，C の方程式から x，y を消去して，x'，y' だけの式を作ると，C' の方程式となる．

＜反転に関する有名な性質＞

1) O を通る直線は，自分自身に移る

2) O を通らない直線は，O を通る円に移る

3) O を通らない円は，O を通らない円に移る

これを，無限遠点を用いて解釈しよう！

＜直線，円の射影＞

○ xy 平面上の直線

$$l: ax+by+c=0$$

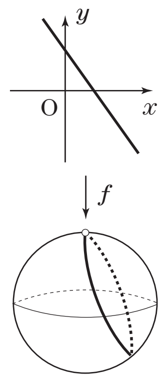
の f による像 $f(l)$ を考える．

$Z \fallingdotseq 1$ より，

$$a\frac{X}{1-Z}+b\frac{Y}{1-Z}+c=0$$

$$\iff aX+bY-c(Z-1)=0$$

は $\mathrm{Q}_\infty(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面を表す．ゆえに，$f(l)$ は Q_∞ を通る S 上の円から Q_∞ を除いたものである．



○ xy 平面上の円

$$C: x^2+y^2+ax+by+c=0$$

の f による像 $f(C)$ を考える．

$X^2+Y^2+Z^2=1$，$Z \fallingdotseq 1$ より，

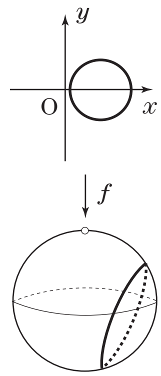
$$\frac{X^2}{(1-Z)^2}+\frac{Y^2}{(1-Z)^2}$$

$$+a\frac{X}{1-Z}+b\frac{Y}{1-Z}+c=0$$

$$\iff \frac{1-Z^2}{(1-Z)^2}+\frac{aX+bY}{1-Z}+c=0$$

$$\iff aX+bY+(1-c)Z+c+1=0$$

である．ゆえに，$f(C)$ は Q_∞ を通らない S 上の円である．



逆に，平面：$aX+bY+cZ+d=0$ の逆像が

$$\frac{2ax+2by+c(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2+1}+d=0$$

$$\iff \ (c+d)x^2+(c+d)y^2+2ax+2by-c+d=0$$

なので，S 上の円の逆像は

　　Q_∞ を通る（$c+d=0$）なら，直線

　　Q_∞ を通らない（$c+d\fallingdotseq 0$）なら，円

である．

以上より，f による像，逆像は，次のようになる：

　　直線 $\rightleftarrows$ Q_∞ を通る円

　　円 $\rightleftarrows$ Q_∞ を通らない円

　　原点 O を通る図形 $\rightleftarrows$ $(0,\ 0,\ -1)$ を通る図形

　　無限に続く図形 $\rightleftarrows$ Q_∞ を通る図形

＜反転関係の射影＞

点 P と，その反転の位置にある点 Q の射影は，

$$f(x,\ y)$$
$$=\frac{1}{x^2+y^2+1}(2x,\ 2y,\ x^2+y^2-1),$$

$$f(x',\ y')$$
$$=\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}+1}\left(\frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{2y}{x^2+y^2},\ \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}-1\right)$$
$$=\frac{1}{x^2+y^2+1}\bigl(2x,\ 2y,\ -(x^2+y^2-1)\bigr)$$

である．よって，反転関係にある２つの図形は，“射影すると XZ 平面に関して対称な位置関係”になっている．

☆　＜直線，円の射影＞と＜反転関係の射影＞を利用すると，＜反転に関する有名な性質＞は明らかである！つまり，XZ 平面に関する対称移動により，

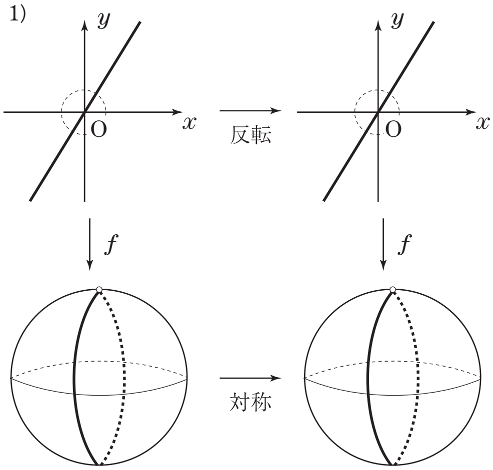
　　$\mathrm{Q}_\infty \rightleftarrows (0,\ 0,\ -1)$

なので，反転により，

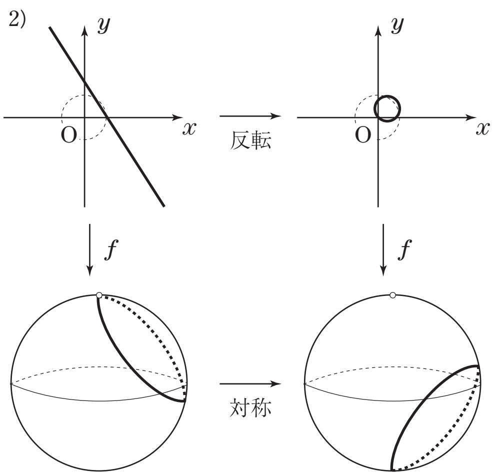
　　原点を通る図形 $\rightleftarrows$ 無限に続く図形

と移り変わる．この様子を右にまとめておく．

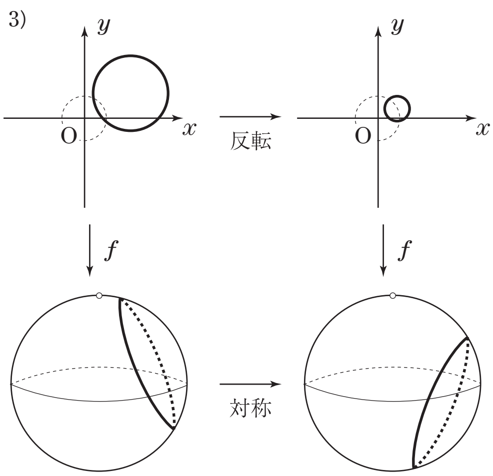
1)



2)



3)



（よしだ　のぶお／研伸館）