数学集中講義

数値の評価について ①　～式変形から多項式近似まで～

吉田　信夫

大学への数学　10 年 1 月号　掲載

東大，京大などの入試問題では，何らかの関係式を利用して数値を評価するものがある (「概算」でなく，「評価」)．特に 2009 年の東大 (理科) において顕著であった．

ここで，数値評価の手段を大雑把に分類すると，

Ⅰ）式変形などの工夫（根性？）による評価

Ⅱ）多項式による評価

Ⅲ）その数値に収束する数列による評価

である．東大の問題を通じて，これらを確認しよう．

問題 1.（1） 実数 x が $-1<x<1$，$x\fallingdotseq 0$ をみたすとき，次の不等式を示せ．

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

（2） 次の不等式を示せ．

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

問題 2. $e^{\pi}>21$ を示せ．ただし，$\pi=3.14\cdots\cdots\cdots$ は円周率，$e=2.71\cdots\cdots\cdots$ は自然対数の底である．

問題 3. $\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\dfrac{5\alpha}{2}<\dfrac{3\sqrt{3}}{2000}$ が成り立つことを示せ．

問題 4. 円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ．

問題 1，4 は順に，2009 年第 5 問，2003 年第 6 問である．**問題** 2，3 はそれぞれ 1999 年第 6 問，2009 年第 6 問の解答過程で現れる評価である．

問題 1.（1）は $(関数)^{(関数)}$ なので, log をとれば示せる．（2）では，（1）の x に何を代入するかを考える．

解 （1） $-1<x<1$ より，示すべき式の対数をとることができるので，

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x)<\frac{1}{x}\log(1+x)$$

を示せば良い．$-1<x<1$ において

$$f(x)=\log(1+x)+(1-x)\log(1-x)$$

とおくと，示すべき式は，両辺に x をかけることで，

$$f(x)>0\ (x>0)\ ,\ \ f(x)<0\ (x<0)$$

となる．ゆえに，これを示せば良い．

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{1+x}+(-1)\log(1-x)+(1-x)\frac{-1}{1-x}\\&=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)-1,\end{aligned}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{-1}{1-x}=\frac{x(x+3)}{(1-x)(1+x)^2}$$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f''(x)$	／	$-$	0	$+$	／
$f'(x)$	／	↘	0	↗	／

$\therefore\quad f'(x)\geqq 0\ (-1<x<1)$

より，$f(x)$ は単調増加する．$f(0)=0$ より，

$$f(x)>0\ (x>0),\ f(x)<0\ (x<0)$$

が成り立つ．以上で示された．

（2）（1）において，$x=0.01=\dfrac{1}{100}$ としたら，

$$\left(1-\frac{1}{100}\right)^{1-100}<\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$$

となり，両辺に $\left(1-\dfrac{1}{100}\right)^{100}$ をかけると，

$$\left(1-\frac{1}{100}\right)^{1-100}\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100}<\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100}$$

$$\Leftrightarrow\quad 1-\frac{1}{100}<\left(1-\frac{1}{10000}\right)^{100}$$

$\therefore\quad 0.99<0.9999^{100}$

となり，右半分は示された．

（1）において，$x=-0.01=-\dfrac{1}{100}$ としたら，

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{1+100}<\left(1-\frac{1}{100}\right)^{-100}$$

となり，両辺に $\left(1-\dfrac{1}{100}\right)^{101}$ をかけると，

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{1+100}\left(1-\frac{1}{100}\right)^{101}<\left(1-\frac{1}{100}\right)^{-100}\left(1-\frac{1}{100}\right)^{101}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(1-\frac{1}{10000}\right)^{101}<1-\frac{1}{100}$$

$\therefore\quad 0.9999^{101}<0.99$

となり，左半分も示された．

*　　　　　*

“Ⅰ)”に必要なものは「想像力」,「逆算する力」と「代入する決断力」であろうか．同様の形式は…

例題　(1)　2つの正の実数 a, b $(a<b)$ に対し，次の不等式を示せ．

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$$

(2)　次の不等式を示せ．

(i)　$\dfrac{1221}{116}<\sqrt{111}<\dfrac{116}{11}$

(ii)　$\dfrac{283272}{26887}<\sqrt{111}<\dfrac{26887}{2552}$

(2008年奈良女子大（一部改題）)

解　(1)　$a>0$, $b>0$, $a<b$ より，

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{2}>0$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

であり，右半分は示された．a, b を $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{a}$ に変えると，

$$\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{2}>\sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{a}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a+b}{2ab}>\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$$\therefore\quad \frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}$$

であり，左半分も示された．

(2)　$ab=111$, $a+b=\dfrac{232}{11}$ $(a<b)$

となる a, b は，解と係数の関係から逆算して，

$$x^2-\frac{232}{11}x+111=(x-11)\left(x-\frac{111}{11}\right)=0$$

の2解であるから，

$$a=\frac{111}{11},\ b=11$$

である．これを(1)に代入すると，

$$\frac{2\cdot\frac{111}{11}\cdot 11}{\frac{111}{11}+11}<\sqrt{\frac{111}{11}\cdot 11}<\frac{\frac{111}{11}+11}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{1221}{116}<\sqrt{111}<\frac{116}{11}$$

となる．

(3)　(1)に $a=\dfrac{1221}{116}$, $b=\dfrac{116}{11}$ を代入すると，

$$\frac{2\cdot\frac{1221}{116}\cdot\frac{116}{11}}{\frac{1221}{116}+\frac{116}{11}}<\sqrt{\frac{1221}{116}\cdot\frac{116}{11}}<\frac{\frac{1221}{116}+\frac{116}{11}}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{283272}{26887}<\sqrt{111}<\frac{26887}{2552}$$

となる．

⇨**注**　この作業を限りなく繰り返すと，$\sqrt{111}$ に収束する．これが“Ⅲ)”の考え方である．

問題 2.　まず“Ⅰ)：計算による証明”を2つ与える．

解1　$e>2.7=\dfrac{3^3}{10}$, $\pi>3.125=\dfrac{25}{8}$

$$\therefore\quad e^\pi>\left(\frac{3^3}{10}\right)^{\frac{25}{8}}$$

より，$e^\pi>21$ を示すには，

$$\left(\frac{3^3}{10}\right)^{\frac{25}{8}}>21\quad\Leftrightarrow\quad 3^{75}>21^8\cdot 10^{25}$$

つまり，

$$3^{67}>7^8\cdot 10^{25}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(*)$$

を示せば良い．さらに，

$$3^6=729>7\cdot 10^2$$

$$\therefore\quad 3^{67}=3\cdot(3^6)^{11}>3\cdot 7^{11}\cdot 10^{22}$$

より，$(*)$ を示すには，

$$3\cdot 7^{11}\cdot 10^{22}>7^8\cdot 10^{25}$$

つまり，

$$3\cdot 7^3>10^3\quad\cdots\cdots\cdots\quad(\#)$$

を示せば良い．

$$3\cdot 7^3=1029>1000$$

より，$(\#)$ が成り立つので，$e^\pi>21$ は成り立つ．

解2　$3^{67}>7^8\cdot 10^{25}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(*)$

を示せば良い．

$$7^2=49<50=\frac{10^2}{2}$$

$$\therefore\quad 7^8\cdot 10^{25}<\frac{10^8}{2^4}\cdot 10^{25}=\frac{10^{33}}{2^4}$$

より，$(*)$ を示すには，

$$3^{67}>\frac{10^{33}}{2^4}\quad\Leftrightarrow\quad 2^4\cdot 3^{67}>10^{33}$$

つまり，

$$4\log_{10}2+67\log_{10}3>33\quad\cdots\cdots\cdots\quad(\%)$$

を示せば良い．

$2^{10}=1024>10^3$　より　$10\log_{10}2>3$

$3^4=81>2^3\cdot 10$　より　$4\log_{10}3>3\log_{10}2+1$

$$\therefore\quad \log_{10}2>0.3,\ \log_{10}3>0.475$$

となるから，

$$4\log_{10}2+67\log_{10}3>33.025>33$$

であり，$(\%)$ が成り立つ．よって，$e^\pi>21$ は成り立つ．

*　　　　*

次に，“Ⅱ）：多項式による評価”を行う．

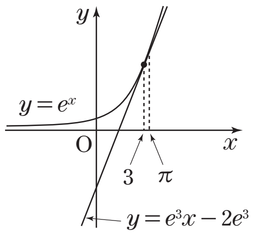
e^{π} を，$y=e^x$ 上の点 $(\pi,\ e^{\pi})$ の y 座標と考え，直線を利用して評価しよう．

解 3　$y=e^x$ のグラフ C は下に凸であるから，$(3,\ e^3)$ における C の接線

$$y=e^3x-2e^3$$

との上下関係から，

$$e^x \geqq e^3x-2e^3$$



が成り立つ (等号は $x=3$ でのみ成り立つ).

$x=\pi$ を代入して，

$$e^{\pi}>e^3(\pi-2)>(2.7)^3(1.1)=21.6513>21$$

が成り立つ．

＊　　　＊

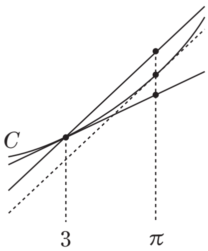
理論的な工夫のおかげで，計算上の工夫はほぼ不要となった．**解** 3の議論を精密化すると，『平均値の定理』を用いた論証になる．

解 4　e^x で平均値の定理より，

$$\frac{e^{\pi}-e^3}{\pi-3}=e^c$$

となる c $(3<c<\pi)$ が存在し，

$$\frac{e^{\pi}-e^3}{\pi-3}>e^3$$



$$\Leftrightarrow \quad e^{\pi}-e^3>e^3(\pi-3)$$

$$\therefore \quad e^{\pi}>e^3(\pi-2)>(2.7)^3(3.1-2)=21.6513$$

$$(\because \quad e>2.7,\ \pi>3.1)$$

が成り立つ．

⇨注　この場合，上からの評価もできる：

$$\frac{e^{\pi}-e^3}{\pi-3}<e^{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\pi}-e^3<e^{\pi}(\pi-3)$$

$$\therefore \quad e^{\pi}<\frac{e^3}{4-\pi}<\frac{(2.72)^3}{4-3.15}=23.67488$$

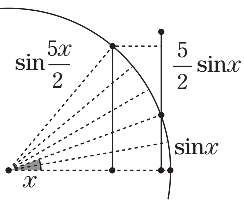
$$(\because \quad e<2.72,\ \pi<3.15)$$

これが“真の1次近似”である．

ちなみに，$e^{\pi} \fallingdotseq 23.14$ である．

問題 3. “半角と5倍角”では苦しい．“Ⅱ)”の考え方により，十分小さい x で

$$\sin x \fallingdotseq x$$



である ($y=x$ は $\sin x$ の原点における接線)．α はかなり小さい角度であるから，

$$\sin\frac{5\alpha}{2} \fallingdotseq \frac{5\alpha}{2} \fallingdotseq \frac{5}{2}\sin\alpha=\frac{5}{2000}<\frac{3\sqrt{3}}{2000}$$

と考えられる．これを精密化した不等式を証明する．

解　$\sin\dfrac{5x}{2}<\dfrac{5}{2}\sin x \ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

を示す．

$$f(x)=\frac{5}{2}\sin x-\sin\frac{5x}{2} \ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと，

$$f'(x)=\frac{5}{2}\cos x-\frac{5}{2}\cos\frac{5x}{2}$$

$$=5\sin\frac{7x}{4}\sin\frac{3x}{4} \geqq 0 \qquad (\because \text{“和→積”公式})$$

である (等号は $x=0$ でのみ成り立つ)．ゆえに，$f(x)$ は単調増加であり，$f(0)=0$ であるから，

$$f(x)>0 \quad \therefore \quad \sin\frac{5x}{2}<\frac{5}{2}\sin x \ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

である．よって，

$$\sin\frac{5\alpha}{2}<\frac{5}{2}\sin\alpha=\frac{5}{2000}<\frac{3\sqrt{3}}{2000}$$

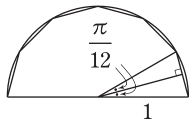
が成り立つ．

問題 4. π をどう見るかによって様々な方法がある．

解 1　“単位円に内接する正 n 角形の周の長さの半分”を L_n とおく $(n \geqq 3)$ と，

$$L_n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot 2\sin\frac{\pi}{n}=n\sin\frac{\pi}{n}$$

であり，常に $L_n<\pi$ である．



L_{12} を考えて，以下を得る：

$$\pi>12\sin\frac{\pi}{12}$$

$$=12\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=12\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=3\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$>3\cdot 1.4\cdot 0.73=3.066$$

⇨注　$\{L_n\}$ の極限は π である．

解 2　$\sin x<x \ (x>0)$　………　(*)

を示す．そのために，

$$f(x)=x-\sin x \ (x \geqq 0)$$

とおく．すると，

$$f'(x)=1-\cos x \geqq 0$$

より，$f(x)$ は単調増加で，$f(0)=0$ より，

$$f(x) \geqq 0 \ (x \geqq 0) \quad (\text{等号は } x=0 \text{ でのみ成立})$$

が成り立つ．よって，(*) が示され，これにより，

$$\sin\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{12}\quad\therefore\quad\pi>12\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}>3.066$$

が成り立つ（解1と同じ評価）．

⇨注　3次式を用いて上からの評価が可能である：

$$x-\frac{1}{6}x^3<\sin x\quad(x>0)\quad\cdots\cdots\cdots\quad(\#)$$

を示そう．そのために，

$$g(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3\quad(x\geqq 0)$$

とおく．すると，

$$g'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2,$$

$$g''(x)=-\sin x+x=f(x)>0\ (x>0)$$

から，$g'(x)$ は単調増加で，$g'(0)=0$ より，

$$g'(x)>0\ (x>0)$$

が成り立つ．$g(x)$ は単調増加で，$g(0)=0$ より，

$$g(x)\geqq 0\ (x\geqq 0)\quad(\text{等号は } x=0 \text{ でのみ成立})$$

であり，(#) が成り立つ．$x=\dfrac{\pi}{6}$ として，

$$\frac{\pi}{6}-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^3<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad\pi<6\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^3\right\}=3+\left(\frac{\pi}{6}\right)^3$$

となる．ここで，単位円と外接正方形の周の長さを比較して，$\pi<4$ であるから，

$$\pi<3+\left(\frac{4}{6}\right)^3<3.3$$

となる．さらに，$\pi<3.3$ を代入して，

$$\pi<3+\left(\frac{3.3}{6}\right)^3<3.167$$

となる（これを繰り返しても近似には限界があり，収束する値は，$x=3+\left(\dfrac{x}{6}\right)^3$ の解（≒ 3.1438）である）．

*　　　　　　*

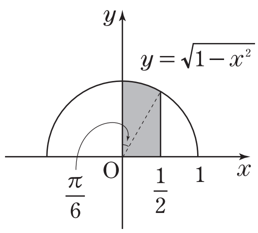
解1，2の考え方は順に“Ⅲ)”，“Ⅱ)”である．最後に，「2006年広島大」を参考にした解答を挙げる．

解3　$\pi>\dfrac{8-\sqrt{3}}{2}\ (=3.13\cdots\cdots\cdots)$

を示せば十分である．

まず，O を中心とする単位円の第1象限の部分と，x 軸，y 軸，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$



である．また，(0，1) が頂点で，点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る放物線 C：$y=1-(4-2\sqrt{3})x^2$ と x 軸，y 軸，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で囲まれる部分の面積 T は

$$T=\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{1-(4-2\sqrt{3})x^2\right\}dx=\left[x-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{12}$$

である．

次に，放物線 C の (0，1) と $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の間の部分が，単位円より下にあること，つまり，

$$1-(4-2\sqrt{3})x^2\leqq\sqrt{1-x^2}\quad\left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つことを示す．

両辺正より，2乗の差をとると．

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(1-(4-2\sqrt{3})x^2\right)^2$$

$$=(1-x^2)-\left(1-2(4-2\sqrt{3})x^2+(28-16\sqrt{3})x^4\right)$$

$$=(7-4\sqrt{3})(1-4x^2)x^2$$

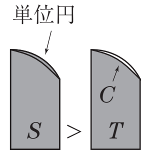
$$\geqq 0\quad\left(\because\ 0\leqq x\leqq\frac{1}{2},\ 4\sqrt{3}<7\right)$$

となるので，成り立つ．

上下関係から，$S>T$ となるので，

$$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}>\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\therefore\quad\pi>\frac{8-\sqrt{3}}{2}>3.13$$



が成り立つ．以上で示された．

*　　　　　　*

最後に，面積を用いて，上から評価してみよう．

放物線 $y=1-\dfrac{1}{2}x^2$ は，頂点が (0，1) であり，

$$\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^2-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2=\frac{1}{4}x^4\geqq 0$$

より，単位円よりも上にある．

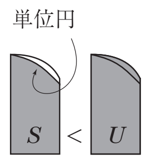
$y=1-\dfrac{1}{2}x^2$ と x 軸，y 軸，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で囲まれる部分の面積 U は

$$U=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[x-\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{23}{48}$$

である．$S<U$ より，

$$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}<\frac{23}{48}$$

$$\therefore\quad\pi<\frac{23-6\sqrt{3}}{4}<3.152$$



と，上から評価できる．

（よしだ　のぶお，予備校講師）