数学集中講義

数値の評価について② ～1次近似から級数表示まで～

吉田　信夫

大学への数学　10年 2月号　掲載

先月号に続き，以下の発想で数値評価を考える．

Ⅰ）式変形などの工夫（根性？）による評価

Ⅱ）多項式による評価

Ⅲ）その数値に収束する数列による評価

問題 5.　以下の問いに答えよ．

（1）　$0<x<a$ を満たす実数 x，a に対し，次を示せ．

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

（2）（1）を利用して，次を示せ．

$0.68<\log 2<0.71$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数を表す．

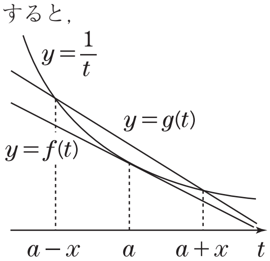
（2007年東大第6問）

面積評価を利用した数値評価である．（2）では，（1）の x，a に何を代入するかを考えるが，工夫なしではうまくいかない．近似精度を上げる方法を考えよう．

解　（1）　$y=\dfrac{1}{t}$ $(t>0)$ とすると，

$$y'=-\frac{1}{t^2}<0,$$
$$y''=\frac{2}{t^3}>0$$

より，$y=\dfrac{1}{t}$ $(t>0)$ のグラフ C は下に凸である．

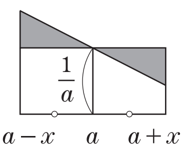


よって，$\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ における C の接線を $y=f(t)$ とし，C 上の2点 $\left(a+x,\ \dfrac{1}{a+x}\right)$，$\left(a-x,\ \dfrac{1}{a-x}\right)$ を結ぶ直線を $y=g(t)$ としたら，

$$f(t)\leqq\frac{1}{t}\leqq g(t)\ (a-x\leqq t\leqq a+x)$$

$$\therefore\quad \int_{a-x}^{a+x}f(t)\,dt<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<\int_{a-x}^{a+x}g(t)\,dt$$

が成り立つ．左辺は，図のように長方形に等積変形でき，



$$\int_{a-x}^{a+x}f(t)\,dt=\frac{1}{a}\{(a+x)-(a-x)\}=\frac{2x}{a}$$

である．右辺は，台形の面積公式から，

$$\int_{a-x}^{a+x}g(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)2x=x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

である．よって，

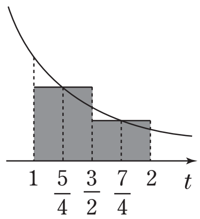
$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

が成り立つ．これで題意は示された．

（2）　$\displaystyle\int_1^2\frac{1}{t}\,dt=\Big[\log t\Big]_1^2=\log 2$

を利用する．近似の精度を上げるために，2つに分ける．

（1）に $a=\dfrac{5}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ と $a=\dfrac{7}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ を代入したもの：

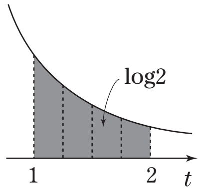


$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}<\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{3}\right)$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}<\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

を加える（右図参照）と，

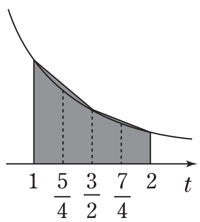
$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{7}\right)=\frac{24}{35}=0.685\cdots\cdots$$

<



$$(\text{中辺})=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{dt}{t}\,dt=\int_1^2\frac{1}{t}\,dt=\Big[\log t\Big]_1^2=\log 2$$

<



$$(\text{右辺})=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2\cdot 2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{24}=0.708\cdots\cdots$$

となり，題意は示された．

*　　　　　*

$\log 2=0.693147\cdots\cdots$ なので，良い評価である．

このように，面積を利用して図形的に数値評価する方法がある．前回挙げた問題を再掲しよう：

問題 4．円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ．
（2003 年東大第 6 問）

解 4　$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $(0\leqq x\leqq 1)$

とおくと，

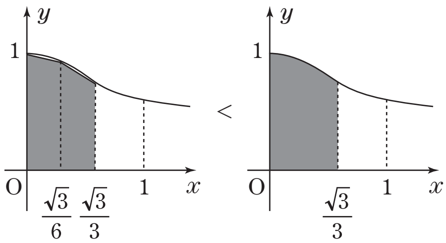
$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=-2\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}<0\,,$$

$$f''(x)=-2\cdot\frac{(1+x^2)^2-x\cdot 4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{3}{4}$	↘	$\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{12}{13}$$

である．よって，図のように評価できる：



ここで，右の面積は，$x=\tan\theta$ とおいて，

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta$$
$$=\frac{\pi}{6}$$

である．左の面積は，台形 2 つの面積を足して，

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{12}{13}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{12}{13}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{187\sqrt{3}}{6\cdot 104}$$

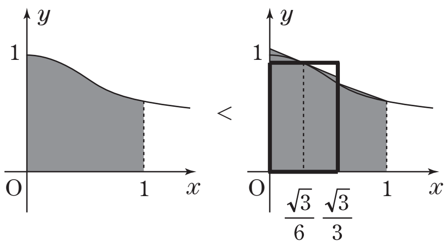
である．$\sqrt{3}>1.7$ であるから，

$$\frac{\pi}{6}>\frac{187\sqrt{3}}{6\cdot 104}$$

$$\therefore\quad \pi>\frac{187\cdot 1.7}{104}=\frac{317.9}{104}=3.0567\cdots\cdots\cdots$$

となり，これで示された．

⇨注　上からの評価も可能である：



ここで，左の面積は，$x=\tan\theta$ とおいて，

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

である．右の面積は，左側の台形を太線の長方形に等積変形して考えると，

$$\frac{12}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{5}{8}+\frac{31\sqrt{3}}{4\cdot 78}$$

である．$\sqrt{3}<1.74$ であるから，

$$\frac{\pi}{4}<\frac{5}{8}+\frac{31\sqrt{3}}{4\cdot 78}$$

$$\therefore\quad \pi<\frac{5}{2}+\frac{31\cdot 1.74}{78}=2.5+\frac{53.94}{78}=3.1915\cdots\cdots\cdots$$

である．

*　　　　　*

これらに関連した“無限級数表記”を紹介する：

1)　$\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots\cdots\cdots$

2)　$\log 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots$

3)　$e=\dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\cdots\cdots\cdots$ $(0!=1)$

証明　1)　初項 1，公比 $-x^2$ の等比数列の和を考えて，

$$\sum_{k=1}^{n}(-x^2)^{k-1}=\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

が成り立つ．この両辺を $0\leqq x\leqq 1$ で積分して，

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 x^{2k-2}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

である．計算すると，

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}\quad（先ほどの計算より）$$

$$(-1)^{k-1}\int_0^1 x^{2k-2}\,dx=(-1)^{k-1}\left[\frac{x^{2k-1}}{2k-1}\right]_0^1=\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

となる．ここで，

$$0<\frac{1}{1+x^2}\leqq 1\ (0\leqq x\leqq 1)$$

$$\therefore\quad 0<\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx\leqq\int_0^1 x^{2n}\,dx$$

であり，

$$\int_0^1 x^{2n}\,dx=\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1=\frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^{2n}\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$$

であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx=0$$

である．よって，

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots$$

が成り立つ．

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}=\frac{1-(-x)^n}{1+x}$ $(0\leqq x\leqq 1)$

を積分する．以降は 1) とほぼ同様なので，省略．

3) $\displaystyle I_0=\int_0^1 e^{-x}\,dx$，$\displaystyle I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}x^n\,dx$

とおくと，

$$I_0=\left[-e^{-x}\right]_0^1=1-\frac{1}{e},$$

$$\begin{aligned}I_{n+1}&=\frac{1}{(n+1)!}\int_0^1(-e^{-x})'x^{n+1}\,dx\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left[-e^{-x}x^{n+1}\right]_0^1+\frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 e^{-x}(n+1)x^n\,dx\\&=\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}x^n\,dx-\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\\&=I_n-\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\quad(n\geqq 0)\end{aligned}$$

となる．階差数列の公式から，$n\geqq 1$ のとき，

$$\begin{aligned}I_n&=I_0+\sum_{m=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{(m+1)!}\right)\\&=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{(m+1)!}\\&=\frac{1}{e}\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\end{aligned}$$

である．ここで，

$$0<e^{-x}\leqq 1\ (0\leqq x\leqq 1)$$

$$\therefore\quad 0\leqq I_n\leqq\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\,dx$$

であり，

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n!}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}=0$$

であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}I_n=0\quad\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)=0$$

である．よって，

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$$

が成り立つ．

* *

無限級数表示のうち，1)，2) は正負の項が交互に現れるため収束速度が遅い．一方で，3) の収束速度は e の定義：

$\displaystyle e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ よりもずっと速い．

n	1	5	10	∞
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$	1.000	0.835	0.760	$\frac{\pi}{4}=0.785$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$	1.000	0.783	0.646	$\log 2=0.693$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$	2.000	2.717	2.718	$e=2.718$
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2.000	2.488	2.594	$e=2.718$

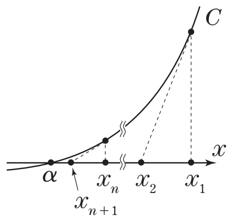
（小数第 4 位を四捨五入）

* *

最後に，2007 年東大総合科目Ⅱ第 1 問をもとにした問題を通じて，近似の定番『ニュートン法』を見ておこう．

問題 6.　$\alpha=10^{\frac{1}{7}}$ の近似値を次の方法で求める：

$f(x)=x^7-10$ とし，$y=f(x)$ のグラフを C とする．$x_1=1.5$ とし，$(x_n,\ f(x_n))$ における C の接線と x 軸の交点の x 座標を x_{n+1} とする．



（1） $x>0$ で常に $f''(x)>0$ となることを示せ．また，$x_n>\alpha$ であることを示せ．

（2） x_{n+1} を x_n で表せ．

（3） α の近似値 x_n の誤差を $\varepsilon_n=x_n-\alpha$ と定義するとき，n によらない正の定数 M を用いて $\varepsilon_{n+1}<M{\varepsilon_n}^2$ の関係が満たされることを示せ．ここで，（2）で得た x_n と x_{n+1} の関係式を $x_{n+1}=g(x_n)$ と表す．このとき，$g(x)$ は $\alpha<x$ のとき，$\alpha<b<x$ の範囲にある b によって

$$g(x)=g(\alpha)+g'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{g''(b)}{2}(x-\alpha)^2$$

と表されることを用いてもよい．

（4） x_2 を α の近似値とするとき，誤差 ε_2 は 0.05 未満であることを示せ．ただし，必要ならば $\alpha>1.35$ を用いて良い．

解 （1） 2回微分して，

$$f'(x)=7x^6,\ f''(x)=42x^5>0\ (x>0)$$

より，前半は示せた．引き続き後半を示す．

$$f(\alpha)=0,\quad f(x_1)=\left(\frac{3}{2}\right)^7-10=\frac{2187}{128}-10>0$$

であり，$f(x)$ は増加関数であるから，$x_1>\alpha$ である．つまり，$n=1$ では成り立つ．

$n=k$ で $x_k>\alpha$ であるとする．$x>0$ で C が下に凸より，$(x_k,\ f(x_k))$ における C の接線は，$x>0$ において C よりも下にある．ゆえに，

「$x_k>\alpha$ ならば $x_{k+1}>\alpha\ \ (k\geqq 1)$」

が成り立つ (前頁の図を参照).

数学的帰納法により，常に $x_n>\alpha$ である．

（2） $(x_n,\ f(x_n))$ における C の接線は

$$y=7{x_n}^6x-6{x_n}^7-10$$

である．$y=0$ として，求める関係式は以下の通り：

$$\boldsymbol{x_{n+1}=\frac{6}{7}x_n+\frac{10}{7{x_n}^6}}$$

（3） ヒントの式から，各 n で

$$g(x_n)=g(\alpha)+g'(\alpha)(x_n-\alpha)+\frac{g''(b_n)}{2}(x_n-\alpha)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\ (*)$$

となる $b_n\ (\alpha<b_n<x_n)$ が存在する．（2）より，

$$g(x)=\frac{6}{7}x+\frac{10}{7x^6}\ \ (x_{n+1}=g(x_n)),$$

$$g'(x)=\frac{6}{7}-\frac{60}{7x^7},\ g''(x)=\frac{60}{x^8}$$

であり，$\alpha^7=10$ から，

$$g(\alpha)=\frac{6}{7}\alpha+\frac{10}{7\alpha^6}=\alpha,\ g'(\alpha)=\frac{6}{7}-\frac{60}{7\alpha^7}=0$$

である．これを $(*)$ に代入すると，

$$x_{n+1}-\alpha=\frac{g''(b_n)}{2}(x_n-\alpha)^2$$

が成り立つ．$g''(x)$ が単調減少であるから，

$$g''(b_n)<g''(\alpha)=\frac{60}{\alpha^8}=\frac{6}{\alpha}\ \ (\because\ \alpha^7=10)$$

が成り立ち，$M=\dfrac{g''(\alpha)}{2}=\dfrac{3}{\alpha}$ とおけば，

$$x_{n+1}-\alpha<M(x_n-\alpha)^2\quad \therefore\quad \varepsilon_{n+1}<M{\varepsilon_n}^2$$

となる．

（4）（3）より，

$$0<\varepsilon_2<M{\varepsilon_1}^2=\frac{3}{\alpha}(1.5-\alpha)^2$$

$$<\frac{3}{1.35}(1.5-1.35)^2=0.05$$

が成り立つ．

＊　　　　＊

$$x_2=\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{2}+\frac{10}{7}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{7201}{5103}=1.411\cdots\cdots\cdots,$$

$$\alpha=1.42857\cdots\cdots\cdots$$

なので，良い近似である．

この近似法をニュートン法というが，$\varepsilon_{n+1}<M{\varepsilon_n}^2$ であるから，収束速度が非常に速い．この評価では，

> $g(x)$ を2回微分可能な関数とする．$\alpha<x$ のとき，$\alpha<b<x$ の範囲にある b によって
>
> $$g(x)=g(\alpha)+g'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{g''(b)}{2}(x-\alpha)^2$$
>
> と表される．

が鍵であった．抽象的になるが，これを証明しておく．

証明 $h(x)=g(x)-g(\alpha)-g'(\alpha)(x-\alpha)$

とおくと，

$$h'(x)=g'(x)-g'(\alpha),$$

$$h(\alpha)=h'(\alpha)=0$$

$$h''(x)=g''(x)$$

である．x を固定したとき，$\alpha<t<x$ を定義域として

$$p(t)=(x-\alpha)^2h(t)-h(x)(t-\alpha)^2$$

とおくと，

$$p(x)=p(\alpha)=0,$$

$$p'(t)=(x-\alpha)^2h'(t)-2h(x)(t-\alpha)$$

である．平均値の定理より，

$$\frac{p(x)-p(\alpha)}{x-\alpha}=p'(c)$$

となる $c\ (\alpha<c<x)$ が存在し，$p(x)-p(\alpha)=0$ なので，

$$p'(c)=0$$

$$\therefore\quad (x-\alpha)^2h'(c)-2h(x)(c-\alpha)=0$$

$$\therefore\quad \frac{h(x)}{(x-\alpha)^2}=\frac{h'(c)}{2(c-\alpha)}\quad\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

が成り立つ．再び平均値の定理から，

$$\frac{h'(c)-h'(\alpha)}{c-\alpha}=h''(b)\quad\left(\Leftrightarrow\quad\frac{h'(c)}{c-\alpha}=g''(b)\right)$$

となる $b\ (\alpha<b<c)$ が存在する．$(*)$ に代入して，

$$h(x)=\frac{h'(c)}{2(c-\alpha)}(x-\alpha)^2=\frac{g''(b)}{2}(x-\alpha)^2$$

$$\therefore\quad g(x)=g(\alpha)+g'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{g''(b)}{2}(x-\alpha)^2$$

である．以上で示された．

（よしだ　のぶお，予備校講師）