数学集中講義

高校数学でみる応用数学① ～確率編～

吉田 信夫

大学への数学 11年2月号 掲載

よく知られているように，数学は世の中のあらゆる分野で応用されている．高校数学の範囲内で議論することができる応用数学の例をいくつか紹介してみたい．

まずは，1977年の京大の問題から．

> **問題** 1．（ｉ）サイコロを1回または2回ふり，最後に出た目の数を得点とするゲームを考える．1回ふって出た目を見た上で，2回目をふるか否かを決めるのであるが，どのように決めるのが有利であるか．
>
> （ii） 上と同様のゲームで，3回ふることも許されるとしたら，2回目，3回目をふるか否かの決定は，どのようにするのが有利か．

“得点”という値を考えるので，有利，不利の判断材料は“期待値”である．

解 （ｉ） サイコロを1回ふって出る目の期待値は，

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{7}{2}=3.5$$

である．2回目をふる場合，得点の期待値は3.5になるので，2回目をふるか否かは，1回目に出る目と3.5を比較して，

1回目に4，5，6が出たら，2回目をふらない

1回目に1，2，3が出たら，2回目をふる

と決めると有利である．

（ii） 2回目をふるとしたら，3回目をふるか否かの判断は，（ｉ）と同様に行う．

1回目をふった後，2回目をふるか否かの判断基準を考える．それは，「残り2回分(2回目と3回目)を上記の方法でふるときの得点の期待値」と「1回目の出目」の大小比較になる．

2回ふれるときの得点の期待値を求める．

● 得点がk ($k=1,\ 2,\ 3$) になるのは，1回目に1，2，3が出て2回目をふることになり，2回目にkが出るときで，確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

である．

● 得点がk ($k=4,\ 5,\ 6$) になるのは，

1） 1回目にkが出る

2） 1回目に1，2，3が出て2回目をふることになり，2回目にkが出る

の2種類があり，確率は

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

である．

ゆえに，2回までふれるときの得点の期待値は，

$$\frac{1+2+3}{12}+\frac{4+5+6}{4}=\frac{17}{4}=4.25$$

である．2回目をふる場合，得点の期待値は4.25なので，2回目をふるか否かは，1回目に出る目と4.25を比較して判断する．3回目をふるか否かは(ｉ)で2回目をふるか否かの判断と同じ方法をとる．

まとめると，

1回目に5，6が出たら，2回目をふらない

1回目に1，2，3，4が出たら，2回目をふる

2回目に4，5，6が出たら，3回目をふらない

2回目に1，2，3が出たら，3回目をふる

と決めると有利である．

＊ ＊

ゲームでの戦略分析を扱う問題は，大学入試でも出題されることがあるが，『ゲーム理論』という分野に属する問題である．現実世界でここまで割り切って判断することは難しいかも知れないが，数学的な判断はこのようになる．**問題** 1では対戦相手がおらず，得点の期待値

を考えることになった．他には，対戦相手との勝敗のみを争うタイプの問題もある．その一例が，次の 2005 年の東大の問題である．

問題 2. N を 1 以上の整数とする．数字 1，2，………，N が書かれたカードを 1 枚ずつ，計 N 枚用意し，甲，乙のふたりが次の手順でゲームを行う．

（i） 甲が 1 枚カードをひく．そのカードに書かれた数を a とする．ひいたカードはもとに戻す．

（ii） 甲は，もう 1 回カードをひくかどうかを選択する．ひいた場合は，そのカードに書かれた数を b とする．ひいたカードはもとに戻す．
ひかなかった場合は，$b=0$ とする．$a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する．

（iii） $a+b\leqq N$ の場合は，乙が 1 枚カードをひく．そのカードに書かれた数を c とする．ひいたカードはもとに戻す．$a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する．

（iv） $a+b\geqq c$ の場合は，乙はもう 1 回カードをひく．そのカードに書かれた数を d とする．
$a+b<c+d\leqq N$ の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は，甲の勝ちとする．

（ii）の段階で，甲にとってどちらの選択が有利であるかを，a の値に応じて考える．以下の問いに答えよ．

（1） 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ．

（2） 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ．

ただし，各カードがひかれる確率は等しいものとする．

解 （1） $b=0$ なので，甲が勝つのは，

$$c+d\leqq a \quad \text{または} \quad c+d>N$$

となるときである．$c\,(1\leqq c\leqq a)$ を固定すると，d は

$$1\leqq d\leqq a-c \quad \text{または} \quad N-c+1\leqq d\leqq N$$

を満たしており，このような d は

$$(a-c)+\{N-(N-c+1)+1\}=a \quad (\text{個})$$

あり，c によらない．よって，求める確率は，

$$\sum_{c=1}^{a}\frac{1}{N}\cdot\frac{a}{N}=\boldsymbol{\frac{a^2}{N^2}}$$

である．

（2） 甲が勝つのは，

$$a+b\leqq N \quad \text{かつ}$$

$$「c+d\leqq a+b \quad \text{または} \quad c+d>N」$$

となるときである．

$a=N$ のとき，2 回目をひくと，甲は必ず負けるので，勝つ確率は 0 である．

$a<N$ とする．$b\ (1\leqq b\leqq N-a)$ を固定すると，甲が勝つ確率は，（1）の a を $a+b$ にしたものを利用して，

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{(a+b)^2}{N^2}=\frac{(a+b)^2}{N^3}$$

である．これらを加えていく．

並べてから Σ を書き直すことで，求める確率は，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^3}\sum_{b=1}^{N-a}(a+b)^2\\
&=\frac{1}{N^3}\left\{(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots\cdots\cdots+N^2\right\}\\
&=\frac{1}{N^3}\left(\sum_{k=1}^{N}k^2-\sum_{k=1}^{a}k^2\right)\\
&=\frac{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)}{6N^3}
\end{aligned}$$

である (これは $a=N$ のときも成り立つ).

以上から，求める確率は

$$\boldsymbol{\frac{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)}{6N^3}}$$

である．

■研究 甲にとって有利な戦略を考えよう．“勝敗” のみを争うので，有利，不利の判断は “確率” で行う．

$$\begin{aligned}
&(（1）\text{の確率})-(（2）\text{の確率})\\
&=\frac{a^2}{N^2}-\frac{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)}{6N^3}\\
&=\frac{a^2}{N^2}-\frac{2N^3+3N^2+N}{6N^3}+\frac{2a^3+3a^2+a}{6N^3}
\end{aligned}$$

となる．6 倍して，$\dfrac{a}{N}$ の 3 次式の形に整理すると，

$$2\left(\frac{a}{N}\right)^3+3\left(2+\frac{1}{N}\right)\left(\frac{a}{N}\right)^2+\frac{1}{N^2}\left(\frac{a}{N}\right)-2-\frac{3}{N}-\frac{1}{N^2}$$

である．よって，甲に有利な戦略は，a の値に対して，

正なら 2 回目をひかない

負なら 2 回目をひく

0 ならどちらでも良い

となる．もう少し分析しよう．

a の N に対する割合を $x=\dfrac{a}{N}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ とおき，

$$f_N(x)=2x^3+3\left(2+\frac{1}{N}\right)x^2+\frac{1}{N^2}x-2-\frac{3}{N}-\frac{1}{N^2}$$

とおく．x にいくつか代入してみよう．

$$f_N\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(2+\frac{1}{N}\right)+\frac{1}{2N^2}-2-\frac{3}{N}-\frac{1}{N^2}$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{9}{4N}-\frac{1}{2N^2}<0$$

より，「a が N の半分」なら，2 回目をひくべきである．

$$f_N\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{54}{125}+\frac{27}{25}\left(2+\frac{1}{N}\right)+\frac{3}{5N^2}-2-\frac{3}{N}-\frac{1}{N^2}$$
$$=\frac{2(37N^2-120N-25)}{125N^2}$$

に $N=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ を代入すると，$N\leqq 3$ なら負，$N\geqq 4$ なら正と分かる．これで「a が N の $\dfrac{3}{5}=0.6$ 倍」のときの判断ができる．

最後に，$N\to\infty$ として，

$$f_\infty(x)=2x^3+6x^2-2$$

とおく．これは $0\leqq x\leqq 1$ で単調増加であり，

$$f_\infty(0)=-2<0,\ f_\infty(1)=6>0$$

であるから，方程式 $f_\infty(x)=0$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の実数解はただ 1 つである．概算すると，その解は

$$x\fallingdotseq 0.532$$

であると分かる．

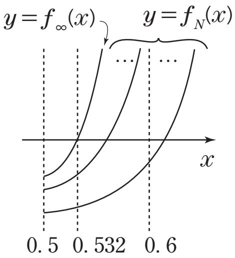
ここで，$y=f_N(x)$ と $y=f_\infty(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ での上下関係は，

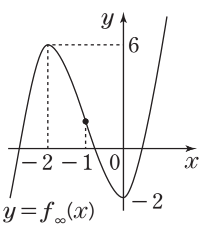
$$f_N(x)=f_\infty(x)+\frac{3}{N}x^2+\frac{1}{N^2}x-\frac{3}{N}-\frac{1}{N^2}$$
$$=f_\infty(x)+\frac{3}{N}(x^2-1)+\frac{1}{N^2}(x-1)$$
$$\leqq f_\infty(x)\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

であるから，どんな N であっても

$$f_N(0.532)<0$$

である (下図参照).





ゆえに，「a が N の 0.532 倍以下」であれば，どんな N でも 2 回目をひくべきである．

*　　　　　*

最後は，ゲーム理論とは違うタイプの実用的な問題を考えてみよう．スーパーやコンビニのレジでの長蛇の列を思い浮かべながら考えてもらいたい．

問題 3.　スーパーマーケットに 4 人の客がいて，1 から 4 までの番号がふられている．4 人の客は，

12 : 00，12 : 01，12 : 02

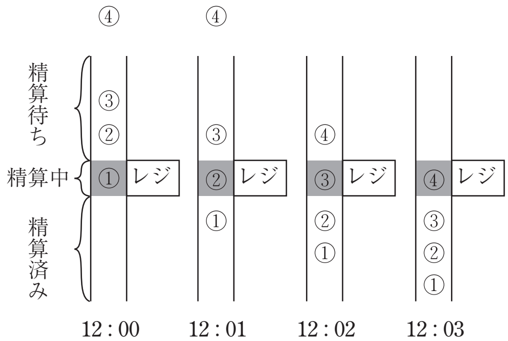
のいずれかを無作為に選んで，精算のためレジに並ぶ．ただし，レジは 1 台のみで，精算に要する時間は一律 1 分である．また，同時にレジに到着した場合，番号の小さい者から順に並ぶとする．

4 人の待ち時間の平均を T (分) とおく．

例えば，1，2，3 が 12 : 00 を選び，4 が 12 : 02 を選んだら，各人の待ち時間と T はそれぞれ

$$0,\ 1,\ 2,\ 1\qquad T=\frac{0+1+2+1}{4}=1$$

である (下図参照).



（1）　T が最大になる確率，最小になる確率をそれぞれ求めよ．

（2）　T の期待値 $E(T)$ を求めよ．

解　12 : 00，12 : 01，12 : 02 に到着する人数を順に並べて (1，2，1) などと表す (誰が並ぶかは別で考える).

問題文中の例は，(3，0，1) のうちの 1 つの場合である．また，全事象は 3^4 通りである．

以下，問題本文のように，並んだ順に各人の待ち時間を書くこととして，待ち時間の平均を計算していく．

（1） T が最大になるのは，4 人が同時に到着するときである．そのときの T の値は

$$0,\ 1,\ 2,\ 3 \qquad T=\frac{0+1+2+3}{4}=\frac{3}{2}$$

である．到着時間の決め方が ${}_3\mathrm{C}_1=3$ 通りあるので，確率は

$$\frac{3}{3^4}=\mathbf{\frac{1}{27}}$$

である．

次に，T が最小になるのは，1 人が 1 分だけ待つとき，つまり，(1，1，2) のときである．そのときの T の値は

$$0,\ 0,\ 0,\ 1 \qquad T=\frac{0+0+0+1}{4}=\frac{1}{4}$$

であり，12 : 00 と 12 : 01 に到着する人の決め方を考えて，確率は

$$\frac{4\cdot 3}{3^4}=\mathbf{\frac{4}{27}}$$

である．

（2） Ⅰ） 4 人まとめて来る場合は既に考えた．

Ⅱ） 3 人と 1 人に分かれてくる場合を考える．1 人で来るのが誰であるかを考え，各パターンは ${}_4\mathrm{C}_1=4$ 通りある．

・(3，1，0)，(0，3，1) のとき，

$$0,\ 1,\ 2,\ 2 \qquad T=\frac{0+1+2+2}{4}=\frac{5}{4}$$

であり，このような到着の仕方は全部で 8 通りある．

・(3，0，1) のとき，

$$0,\ 1,\ 2,\ 1 \qquad T=\frac{0+1+2+1}{4}=1$$

であり，このような到着の仕方は 4 通りある．

・(1，3，0)，(1，0，3)，(0，1，3) のとき，

$$0,\ 0,\ 1,\ 2 \qquad T=\frac{0+0+1+2}{4}=\frac{3}{4}$$

であり，このような到着の仕方は全部で 12 通りある．

Ⅲ） 2 人ずつに分かれてくる場合を考える．何分にくるかを考慮するので，早い時刻にくる 2 人の選び方を考えて，各パターンは ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通りある．

・(2，2，0)，(0，2，2) のとき，

$$0,\ 1,\ 1,\ 2 \qquad T=\frac{0+1+1+2}{4}=1$$

であり，このような到着の仕方は全部で 12 通りある．

・(2，0，2) のとき，

$$0,\ 1,\ 0,\ 1 \qquad T=\frac{0+1+0+1}{4}=\frac{1}{2}$$

であり，このような到着の仕方は 6 通りある．

Ⅳ） 1 人，1 人，2 人に分かれてくる場合を考える．到着時刻を考慮するので，1 人でくる 2 名を到着時刻の早い方から順に選ぶと考えて，各パターンは ${}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1=12$ 通りある．

・(1，1，2) の場合は既に考えた．

・(2，1，1) のとき，

$$0,\ 1,\ 1,\ 1 \qquad T=\frac{0+1+1+1}{4}=\frac{3}{4}$$

であり，このような到着の仕方は 12 通りある．

・(1，2，1) のとき，

$$0,\ 0,\ 1,\ 1 \qquad T=\frac{0+0+1+1}{4}=\frac{1}{2}$$

であり，このような到着の仕方は 12 通りある．

以上から，求める T の期待値 $E(T)$ は，

$$\begin{aligned}E(T)&=\frac{1}{3^4}\Bigl(3\cdot\frac{3}{2}+8\cdot\frac{5}{4}+4\cdot 1+12\cdot\frac{3}{4}+\\&\qquad 12\cdot 1+6\cdot\frac{1}{2}+12\cdot\frac{1}{4}+12\cdot\frac{3}{4}+12\cdot\frac{1}{2}\Bigr)\\&=\frac{9+20+8+18+24+6+6+18+12}{162}\\&=\mathbf{\frac{121}{162}}\end{aligned}$$

である．

*　　　　　　*

このような問題は『待ち行列理論』の対象である (ここで言う行列とは，“数が 4 つ並んだ数学的行列”ではなく，“人が並んだ日常的な意味での行列”である)．本問は，待ち行列の非常に単純なモデルである．

待ち行列は，「レジの設置台数算出」以外にも，「必要なモデム数や電話線の本数を接続要求数から算出」などに応用される．この理論が発達した理由は，応用範囲の広さに加え，直観的でない結果が得られることにある．

■研究　問題 3 の「客 4 人レジ 1 台」の場合，期待値 $E(T)$ は，

$$\frac{121}{162}=0.74691\cdots\cdots\cdots$$

であった．

同じ設定で，「客 1 人」，「客 2 人」，「客 3 人」の場合，$E(T)$ はどうなるか？

「客数に比例する！」

と思うかも知れないが，現実はそれほど簡単でない．

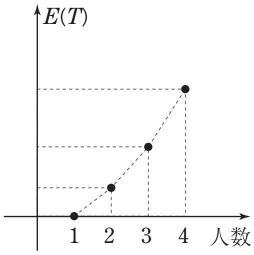
実際は，順に

0,

$\frac{1}{6}=0.16666\cdots\cdots\cdots$,

$\frac{11}{27}=0.40740\cdots\cdots\cdots$

となる (計算は容易). 図のように，比例関係にはなっていない.



また，「客が 6 人になり，レジを 2 台に増やす (1 列に並び，レジが空けば，順に清算)」と，どうなるか？

「客 3 人レジ 1 台と同じ！」

と思うかも知れないが，実際の $E(T)$ は

$$\frac{647}{2187}=0.29583\cdots\cdots\cdots<0.40740\cdots\cdots\cdots$$

となる (計算省略).

「客 9 人レジ 3 台」,「客 12 人レジ 4 台」などでは，$E(T)$ はさらに小さくなる (計算は大変！).

客の待ち時間が減り過ぎると，レジの稼働率が下がってしまう．ゆえに,「客が倍増したからレジも倍増」という単純な考え方では，無駄な人件費が発生してしまうことになる.

直観が通じないのが，待ち行列理論の面白いところで，それゆえに有益なのである.

（よしだ　のぶお，予備校講師）