数学集中講義

４点を通る楕円は存在するか？　～通過領域の応用～

吉田　信夫

大学への数学　11 年 ３月号　掲載

> 平面内の凸四角形 PQRS に対し，P，Q，R，S を通る楕円が存在する．

は成り立つだろうか？

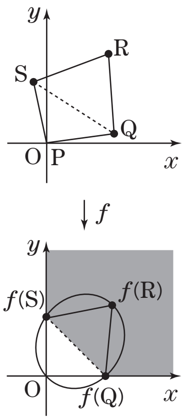
これを考えるのに，状況を簡単にしよう．

まず，平行移動して，P は原点 O にあるとして良い．

Q$(a,\ b)$，S$(c,\ d)$ とし，行列 A を $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とおく．もし

$$\det A = ad-bc=0$$

であれば，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ が平行 (あるいは零ベクトル) となり，三角形 OQS が存在しない．



よって，$\det A \neq 0$ であり，A は逆行列 A^{-1} をもつ．

さらに，

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

より，

$$A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A^{-1}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．つまり，A^{-1} が表す 1 次変換 f で P，Q，R，S を移すと，

$$f(\mathrm{P})=(0,\ 0),\ f(\mathrm{Q})=(1,\ 0),\ f(\mathrm{S})=(0,\ 1)$$

となる．また，凸性より，$f(\mathrm{R})$ は

$$x>0,\ y>0,\ x+y>1$$

の領域内にある．

もしも，4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$f(\mathrm{R})$ を通る楕円 E が存在するならば，E を f^{-1} で移した像 $f^{-1}(E)$ (つまり，f で移すと E 上にくる点の軌跡) は 4 点 P，Q，R，S を通る楕円になる．

このような楕円 E の存在を考えるために，まず，3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を通る楕円について調べよう．

> **問題** 1．A，B を実数とする．このとき，曲線
> $$C: x^2+Axy+By^2-x-By=0$$
> について考える．
> （1） A，B によらず C が通る定点が存在することを示し，そのような点を求めよ．
> （2） A，B が $A^2-4B<0$ を満たすとき，C は楕円であることを示せ．

解　（1） C の方程式を A，B について整理すると

$$xyA+y(y-1)B+x(x-1)=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

となる．$(*)$ が A，B の恒等式になる組 $(x,\ y)$ が存在することを示せば良い．それは，

$$xy=0,\ y(y-1)=0,\ x(x-1)=0$$

を満たすものである．$x=0$ のとき，$y(y-1)=0$ であり，$y=0$ のとき，$x(x-1)$ であるから，これらをすべて満たすのは

$$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (0,\ 1)$$

である．よって，C は，A，B の値と無関係に

$$(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (0,\ 1)$$

を通ることが示された．

（2） C は 2 次曲線である (2 直線などになる可能性もある)．楕円である条件は，『C 上の点の y 座標がとりうる値の範囲が，有限な閉区間になること』である．

y 座標の範囲を求める．

$$x^2+Axy+By^2-x-By=0$$

を x の 2 次方程式と見なすと，

$$x^2+(Ay-1)x+By(y-1)=0$$

である．これが実数解 x をもつような y の条件が，y 座標の範囲となる．その条件とは，判別式を D_1 として，

$$D_1=(Ay-1)^2-4By(y-1)\geqq 0$$

$$\therefore \quad (A^2-4B)y^2-2(A-2B)y+1\geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\$)$$

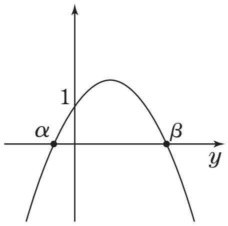
であり，2 次不等式 ($) を解くと，$y$ 座標の範囲となる．

$y=0$ で (($) の左辺) = 1 で，しかも $A^2-4B<0$ であるから，($) を解くと，図のように，

$$\alpha \leqq y \leqq \beta$$

となる．これが y の範囲なので，C は楕円である．

⇨注　逆にもたどれるから，条件：$A^2-4B<0$ は，C が楕円になるための必要十分条件である．



> **問題2.**　A，B を実数とする．このとき，曲線
> $$C: x^2+Axy+By^2-x-By=0$$
> について考える．A，B が $A^2-4B<0$ を満たして変化するとき，C の通過領域を図示せよ．

通過領域の定石通りに解く．つまり，2 つの実数 A，B が存在するような $(x,\ y)$ の範囲を考えれば良い．

解　C の方程式を A，B について整理する：

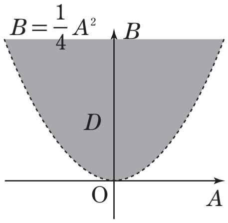
$$xyA+y(y-1)B+x(x-1)=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

A，B に関する方程式 $(*)$ が

$$A^2-4B<0 \quad \text{つまり} \quad B>\frac{1}{4}A^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\#)$$

を満たす解をもつ $(x,\ y)$ 全体の集合が，C の通過領域である．

ここで，AB 平面で $(\#)$ を図示すると右の領域 D になる（ただし，境界を含まない）．



また，$(*)$ も図形化したいので，

$$y(y-1)B=-xyA-x(x-1)$$

と変形しておき，これが表す図形を L とおく．

求める条件は，$(*)$ かつ $(\#)$ を満たす A，B が存在すること，つまり，「D と L が共有点をもつこと」である．

ｉ）　$y=0$ のとき，$(*)$ は

$$x(x-1)=0$$

である．

ｉ－１）　$x(x-1)=0$ つまり $x=0,\ 1$ のとき，L は“すべての点”となるので，適する．

ｉ－２）　$x(x-1)\neq 0$ つまり $x\neq 0$ かつ $x\neq 1$ のとき，L は存在せず，不適である．

ii）　$y=1$ のとき，$(*)$ は

$$xA=-x(x-1)$$

となる．

ii－１）　$x=0$ のとき，L は“すべての点”となるので，適する．

ii－２）　$x\neq 0$ のとき，L は B 軸に平行な直線

$$A=-(x-1)$$

となるから，共有点は存在し，適する．

iii）　$y\neq 0$ かつ $y\neq 1$ のとき，L は直線で，

$$B=-\frac{x}{y-1}A-\frac{x(x-1)}{y(y-1)}$$

と変形できる．

$B=\frac{1}{4}A^2$ の接線で，傾きが $-\frac{x}{y-1}$ のものを求めよう．

接点の A 座標を t としたら，

$$\frac{1}{2}t=-\frac{x}{y-1} \quad \therefore \quad t=-\frac{2x}{y-1}$$

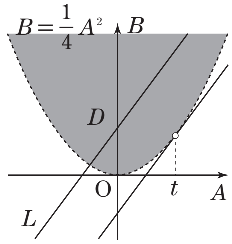
となるので，そのような接線は

$$B=-\frac{x}{y-1}\left(A+\frac{2x}{y-1}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{2x}{y-1}\right)^2$$

$$\therefore \quad B=-\frac{x}{y-1}A-\left(\frac{x}{y-1}\right)^2$$

である．

求める条件は，L がこの接線より上にあることなので，B 切片を比較して，



$$-\frac{x(x-1)}{y(y-1)}>-\left(\frac{x}{y-1}\right)^2$$

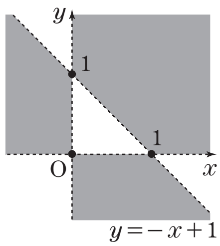
である．両辺に $y^2(y-1)^2$ をかけて整理すると，

$$xy(x-1)(y-1)<x^2y^2$$

$$\therefore \quad xy(x+y-1)>0$$

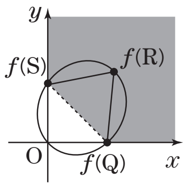
である（ただし，$y\neq 0$，$y\neq 1$）．

以上から，C の通過領域を図示すると，右のようになる（ただし，境界上の点は，3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ のみを含む）．



＊　　　　　＊

当初の命題に話を戻すと，3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を通る楕円の通過領域内に $f(\mathrm{R})$ が入ることが分かったので，



> 平面内の凸四角形 PQRS に対し，P，Q，R，S を通る楕円が存在する．

が成り立つことが示された．

（よしだ　のぶお，予備校講師）