数学集中講義

大学入試数学にみる“ちょっと大人”の数論

吉田　信夫

大学への数学　12 年 1 月号　掲載

2011 年の阪大理系では，衝撃的な数論の問題が出題されていました．本誌 4 月号で解説がありましたが，ここでも問題と解答を挙げておきます．

「どんな自然数を代入しても立方数になる 3 次関数」を決定する問題です．

問題 1.　a，b，c を正の定数とし，x の関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える．以下，定数はすべて実数とする．

（1）　定数 p，q に対し，次をみたす定数 r が存在することを示せ．

$x\geqq 1$ ならば $|px+q|\leqq rx$

（2）　恒等式 $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$ を用いて，次をみたす定数 k，l が存在することを示せ．

$x\geqq 1$ ならば $\left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right|\leqq\dfrac{l}{x}$

（3）　すべての自然数 n に対して，$\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする．このとき関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x)=(x+m)^3$ と表されることを示せ．

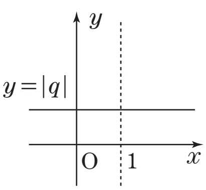
解　（1）　$y=|px+q|$ と $y=rx$ のグラフの上下関係を考える．前者のグラフは，

1) $p=0$ のときは x 軸と平行な直線

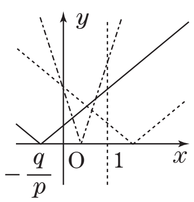
2) $p\fallingdotseq 0$ のときは $\left(-\dfrac{q}{p},\ 0\right)$ が分岐点になった折れ線

である．

1) $p=0$

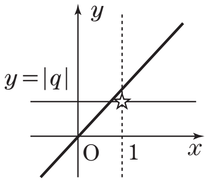


2) $p\fallingdotseq 0$

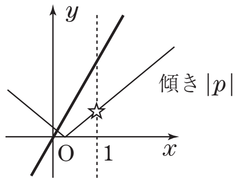


$y=|px+q|$ は $(1,\ |p+q|)$ を通り，十分大きい x では傾きが $|p|$ の直線になっている．

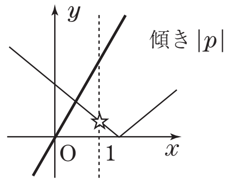
1) $p=0$



2. 1) $-\dfrac{q}{p}\leqq 1$



2. 2) $-\dfrac{q}{p}\geqq 1$



よって，$|p+q|$ よりも $|p|$ よりも大きい実数 r をとると，

$x\geqq 1$ ならば $|px+q|\leqq rx$

が成り立つ．以上で示された．

注　視覚的に考えたが，式のみで処理することもできる：

$$\begin{aligned}|px+q|&\leqq|px|+|q|\\&\leqq|p|x+|q|x\quad(x\geqq 1)\\&=(|p|+|q|)x\end{aligned}$$

より，$r=|p|+|q|$ とすれば良い．

（2）　$f(x)$ に近い 3 次関数として

$$\left(x+\frac{a}{3}\right)^3=x^3+ax^2+\frac{a^2}{3}x+\frac{a^3}{27}$$

を連想できるので，k の場所を $\dfrac{a}{3}$ に変えたものを考えてみる．$\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^3=f(x)$ に注意して，ヒントの恒等式を用いる．そのために

$$\alpha=\sqrt[3]{f(x)},\ \beta=x+\frac{a}{3}$$

とおくと，

$$\alpha=\sqrt[3]{x^3+ax^2+bx+d}\geqq\sqrt[3]{x^3}=x\ (x\geqq 1),$$

$$\beta=x+\frac{a}{3}\geqq x,$$

$$\alpha^3-\beta^3=f(x)-\left(x+\frac{a}{3}\right)^3=\left(b-\frac{a^2}{3}\right)x+\left(c-\frac{a^3}{27}\right)$$

となることに注意する．すると，

$$\alpha-\beta=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}\leqq\frac{\left(b-\frac{a^2}{3}\right)x+\left(c-\frac{a^3}{27}\right)}{3x^2}$$

$$\therefore\ |\alpha-\beta|\leqq\frac{\left|\frac{1}{3}\left(b-\frac{a^2}{3}\right)x+\frac{1}{3}\left(c-\frac{a^3}{27}\right)\right|}{x^2}$$

となり，（1）より，

$$\left|\frac{1}{3}\left(b-\frac{a^2}{3}\right)x+\frac{1}{3}\left(c-\frac{a^3}{27}\right)\right|\leqq rx\ \ (x\geqq1)$$

となる r が存在するので，

$$\left|\sqrt[3]{f(x)}-x-\frac{a}{3}\right|\leqq\frac{rx}{x^2}=\frac{r}{x}\ \ (x\geqq1)$$

となる．よって，$k=\frac{a}{3}$，$l=r$ とすれば良いことが分かった．以上で示された．

（3）　$\left|\sqrt[3]{f(n)}-n-\frac{a}{3}\right|\leqq\frac{l}{n}$

となるような実数の定数 l が存在し，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l}{n}=0$$

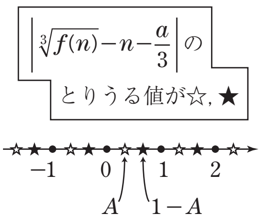
なので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[3]{f(n)}-n-\frac{a}{3}\right|=0$$

である．

まず，$\frac{a}{3}$ (>0) が自然数であることを示す．そのために，

$\frac{a}{3}$ の小数部分を A $(0\leqq A<1)$ とおき，$A=0$ を示す．



$A\neq0$ なら，$\sqrt[3]{f(n)}-n$ は整数より，$\left|\sqrt[3]{f(n)}-n-\frac{a}{3}\right|$ の小数部分は A または $1-A$ になる．0 との距離が定数以上になるため，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[3]{f(n)}-n-\frac{a}{3}\right|=0$$

とはならない．よって，$A=0$ である．

すると，n を限りなく大きくすると，整数値しかとらない $\left|\sqrt[3]{f(n)}-n-\frac{a}{3}\right|$ が限りなく 0 に近付くので，十分大きい n では，常に 0 になり，

$$\sqrt[3]{f(n)}-n-\frac{a}{3}=0\quad\therefore\ \ f(n)=\left(n+\frac{a}{3}\right)^3$$

が成り立つ．これは，

$$x^3+ax^2+bx+c=\left(x+\frac{a}{3}\right)^3\quad\cdots\cdots\cdots\quad(*)$$

を満たす x が十分多く (少なくとも 4 個) 存在するということなので，(*) は恒等式である．

$m=\frac{a}{3}$ (自然数) とすることで，$f(x)=(x+m)^3$ と表されることが示された．

*　　　　　*

離散的な情報 (飛び飛びの値 n で立方数) が，連続的な情報 (すべての値 x で立方式) に昇華した．

（1）は“大人っぽい”．数論では，「$|px+q|\leqq rx$ となる r が存在する」を「$|px+q|=O(x)$」と略記して，「$|px+q|$ は x の定数倍でおさえられる」と読ませる．

（2）は別の方法でも示すことができるので，後ほど，問題 3 の（1）でその方法を紹介する．

（3）の論法は高校生にはなじみがないかも知れない．特に小数部分を考えるところは厄介である．しかし，阪大では，極限を用いた数論の問題が過去にも出題されている (2003 年前期［４］)．漸化式という離散的な情報から，対数が現れるところが興味深い．

問題 2.　数列 $\{a_k\}$ が $a_k<a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

および

$$a_{kl}=a_k+a_l,\ \ k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ l=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

をみたすとする．

（1）　$k,\ l$ を 2 以上の自然数とする．自然数 n が与えられたとき $l^{m-1}\leqq k^n<l^m$ をみたす自然数 m が存在することを示せ．

（2）　$k,\ l$ を 2 以上の自然数とするとき

$-\frac{1}{n}<\frac{a_k}{a_l}-\frac{\log k}{\log l}<\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots\cdots$ が成り立つことを示せ．

（3）　$a_2=a$ とするとき，数列 $\{a_k\}$ の一般項を求めよ．

解（1）　$l\geqq2$ より，等比数列 $\{l^{m-1}\}$ は増加数列で，$+\infty$ に発散する．よって，与えられた n に対して，

「$l^{m-1}\leqq k^n$ を満たす最大の自然数 m」

が存在する．それが求める m である．

（2）（1）より，自然数 $k,\ l$ $(\geqq2)$ を決めておき，n を任意にとると，$l^{m-1}\leqq k^n<l^m$ をみたす m が存在する．すべて正なので対数をとることができて，

$$(m-1)\log l \leqq n\log k < m\log l$$

$$\therefore\ \frac{m-1}{n} \leqq \frac{\log k}{\log l} < \frac{m}{n}\ \cdots\cdots\cdots\ ①$$

となる ($l \geqq 2$ より $\log l > 0$).

次に，数列 $\{a_k\}$ について考える．

$$a_{p\times 1} = a_p + a_1 \quad \therefore \quad a_1 = 0$$

であり，$\{a_k\}$ は増加数列であるから，

$$a_p > 0\ (p \geqq 2)$$

である．また，

$$a_{k\times k^p} = a_k + a_{k^p}$$

より，

$$a_{k^2} = 2a_k,\ a_{k^3} = 3a_k,\ \cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad a_{k^n} = na_k$$

であり，同様に，

$$a_{l^{m-1}} = (m-1)a_l,\ a_{l^m} = ma_l$$

である．$l^{m-1} \leqq k^n < l^m$ なので，

$$a_{l^{m-1}} \leqq a_{k^n} < a_{l^m}$$

$$\therefore\quad (m-1)a_l \leqq na_k < ma_l$$

である．すべて正の数なので，

$$\frac{m-1}{n} \leqq \frac{a_k}{a_l} < \frac{m}{n}\ \cdots\cdots\cdots\ ②$$

とできる．

ここで，①，② に注目する．中辺の差をとりたいが，そのまま引くことはできないので，① を

$$-\frac{m}{n} < -\frac{\log k}{\log l} \leqq -\frac{m-1}{n}$$

と変形して，② との和をとる．すると，

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} < \frac{1}{n}$$

を得る．以上で示された．

（3）$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

なので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l}\right) = 0$$

である．ここで，$\dfrac{a_k}{a_l} - \dfrac{\log k}{\log l}$ は n によらない定数なので，

$$\frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} = 0$$

ということである．

これが 2 以上の自然数 k, l に対して成り立つ．

$a_2 = a$ を利用するために，$l = 2$ を代入する．すると，

$$\frac{a_k}{a_2} - \frac{\log k}{\log 2} = 0 \quad \therefore \quad a_k = a\frac{\log k}{\log 2} = a\log_2 k$$

となる ($k = 1$ としたら $a\log_2 1 = 0 = a_1$ になり，成立).

よって，一般項は

$$\boldsymbol{a_k = \log_2 k}$$

である．

＊　　　　　＊

一般項は必要条件として求まっている．どうしても気になるなら，「逆に，$a_k = a\log_2 k$ のとき，$a_k < a_{k+1}$ および $a_{kl} = a_k + a_l$ が成り立ち，十分」としておけば良いが，数列の存在は認めても良いだろう．

数論の論証で極限を使うのは，大人の世界では普通のことである．実は, 同じ 2003 年の阪大後期［4］では,「積分を利用して漸化式を作り，極限を利用して“円周率 π は無理数”を示す」という重厚な問題が出題されている．興味がある人は，ぜひチャレンジしていただきたい．

では，最後は，問題 1 を一般化してみよう．（1）が問題 1（2）の別解になるよう，誘導にも少し変化を加えている．

問題 3. p を 2 以上の自然数とする．p 個の正の定数 a_1, a_2, $\cdots\cdots\cdots$, a_p を用いて，x の p 次関数 $f(x)$ を $f(x) = x^p + \sum_{k=1}^{p} a_k x^{k-1}$ と定める．

（1） 平均値の定理を用いて，次をみたす正の定数 l が存在することを示せ．

$$x \geqq 1 \text{ ならば } \left|\sqrt[p]{f(x)} - \left(x + \frac{a_p}{p}\right)\right| \leqq \frac{l}{x}$$

（2） すべての自然数 n に対して，$\sqrt[p]{f(n)}$ が自然数であるとする．このとき関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x) = (x+m)^p$ と表されることを示せ．

解（1）$\sqrt[p]{f(x)} - \left(x + \dfrac{a_p}{p}\right) = 0$ となる x では，任意の正数 l で成り立つ．よって，$\sqrt[p]{f(x)} - \left(x + \dfrac{a_p}{p}\right) \neq 0$ となる x のみ考える．

$g(x) = x^{\frac{1}{p}}$ ($x > 0$) とおくと，$g(x)$ は微分可能で

$$g'(x) = \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{px^{1-\frac{1}{p}}}$$

である．

すると，平均値の定理より，

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(X)$$

$$\left(b=f(x),\ a=\left(x+\frac{a_p}{p}\right)^p\right)$$

となる X が a と b の間に存在する．つまり，

$$\frac{\sqrt[p]{f(x)}-\left(x+\frac{a_p}{p}\right)}{f(x)-\left(x+\frac{a_p}{p}\right)^p}=\frac{1}{pX^{1-\frac{1}{p}}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

となる X が存在する (ただし X は $f(x)$ と $\left(x+\frac{a_p}{p}\right)^p$ の間に入る)．ここで，係数がすべて正なので，

$$f(x)\geqq x^p,\quad \left(x+\frac{a_p}{p}\right)^p\geqq x^p \quad \therefore \quad X\geqq x^p$$

である．① の両辺に絶対値を付けた式に代入して，

$$\left|\frac{\sqrt[p]{f(x)}-\left(x+\frac{a_p}{p}\right)}{f(x)-\left(x+\frac{a_p}{p}\right)^p}\right|=\frac{1}{pX^{1-\frac{1}{p}}}\leqq\frac{1}{p(x^p)^{1-\frac{1}{p}}}=\frac{1}{px^{p-1}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

となる．ここで，左辺の分母は，二項定理より

$$\begin{aligned}
&f(x)-\left(x+\frac{a_p}{p}\right)^p\\
&=x^p+a_px^{p-1}+a_{p-1}x^{p-2}+\cdots\cdots\cdots+a_2x+a_1\\
&\quad-\left(x^p+a_px^{p-1}+{}_p\mathrm{C}_2\frac{{a_p}^2}{p^2}x^{p-2}+\cdots\cdots\right.\\
&\qquad\qquad\left.\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}\frac{{a_p}^{p-1}}{p^{p-1}}x+\frac{{a_p}^p}{p^p}\right)\\
&=\left(a_{p-1}-{}_p\mathrm{C}_2\frac{{a_p}^2}{p^2}\right)x^{p-2}+\cdots\cdots\\
&\qquad\cdots\cdots+\left(a_2-{}_p\mathrm{C}_{p-1}\frac{{a_p}^{p-1}}{p^{p-1}}\right)x+a_1-\frac{{a_p}^p}{p^p}
\end{aligned}$$

となる．よって，絶対値について，$x\geqq 1$ において

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\left(x+\frac{a_p}{p}\right)^p\right|\\
&\leqq\left|a_{p-1}-{}_p\mathrm{C}_2\frac{{a_p}^2}{p^2}\right|x^{p-2}+\cdots\cdots\\
&\qquad\cdots\cdots+\left|a_2-{}_p\mathrm{C}_{p-1}\frac{{a_p}^{p-1}}{p^{p-1}}\right|x+\left|a_1-\frac{{a_p}^p}{p^p}\right|\\
&\leqq\left|a_{p-1}-{}_p\mathrm{C}_2\frac{{a_p}^2}{p^2}\right|x^{p-2}+\cdots\cdots\\
&\qquad\cdots\cdots+\left|a_2-{}_p\mathrm{C}_{p-1}\frac{{a_p}^{p-1}}{p^{p-1}}\right|x^{p-2}+\left|a_1-\frac{{a_p}^p}{p^p}\right|x^{p-2}\\
&\leqq Ax^{p-2}
\end{aligned}$$

となる正数 A が存在する (A は x によらない定数)．

② の分母 (>0) を払った式：

$$\left|\sqrt[p]{f(x)}-\left(x+\frac{a_p}{p}\right)\right|\leqq\frac{1}{px^{p-1}}\left|f(x)-\left(x+\frac{a_p}{p}\right)^p\right|$$

と合わせて，

$$\left|\sqrt[p]{f(x)}-\left(x+\frac{a_p}{p}\right)\right|\leqq\frac{1}{px^{p-1}}\cdot Ax^{p-2}=\frac{A}{px}$$

となる．よって，$l=\frac{A}{p}$ とすれば良い．これで示せた．

（2） $\left|\sqrt[p]{f(n)}-\left(n+\frac{a_p}{p}\right)\right|\leqq\frac{l}{n},\ \lim_{n\to\infty}\frac{l}{n}=0$

なので，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[p]{f(n)}-\left(n+\frac{a_p}{p}\right)\right|=0$$

である．しかも $\sqrt[p]{f(n)}-n$ が整数値なので，$\frac{a_p}{p}$ の小数部分は 0 でなければならない．よって，$\frac{a_p}{p}$ は自然数であり，十分大きい n で常に

$$\sqrt[p]{f(n)}-\left(n+\frac{a_p}{p}\right)=0 \quad \therefore \quad f(n)=\left(n+\frac{a_p}{p}\right)^p$$

が成り立つ．

$$f(x)=\left(x+\frac{a_p}{p}\right)^p$$

は両辺とも p 次式だが，これをみたす x が十分多く存在するので，これは恒等式である．

$m=\frac{a_p}{p}$ (自然数) とすることで，$f(x)=(x+m)^p$ と表されることが示された．

*　　　　　　　*

（1）の不等式を示すには，**問題** 1（2）と同様に

$$\begin{aligned}&(\alpha-\beta)(\alpha^{p-1}+\alpha^{p-2}\beta+\alpha^{p-3}\beta^2+\cdots\cdots\cdots+\beta^{p-1})\\&=\alpha^p-\beta^p\end{aligned}$$

を利用しても良いが，ここでは平均値の定理を用いる誘導にした．

数論で平均値の定理を使うのは意外と感じるかも知れない．しかし，過去も現在も，数論の研究者は天才数学者ばかりである．「あの数のこの性質を表記するのに，その式を使えるのではないか」という直観がとても鋭いのである．そんな人たちにとって，数学的な垣根などはあってないようなものなのである．大数読者のみなさんも，広い視野で問題をとらえ，単元にこだわらず解法を探求していけば，壮大な世界が眼前に広がるのではないだろうか．

（よしだ　のぶお，予備校講師）